SVEUČILIŠTE U MOSTARU
EKONOMSKI FAKULTET
SVEUČILIŠTE U SPLITU
EKONOMSKI FAKULTET

Anela Čolak

UTJECAJ POSLOVNIH RIZIKA NA OBLIKOVANJE I PLASMAN MATEMATIČKE PRIČUVE ŽIVOTNIH OSIGURANJA

DOKTORSKI RAD

Mentor: prof.dr.sc. Željko Šain

Mostar, 2016. godina

UNIVERSITY OF MOSTAR
FACULTY OF ECONOMICS
UNIVERSITY OF SPLIT
FACULTY OF ECONOMICS

Anela Čolak

INFLUENCE OF BUSINESS RISKS ON SHAPING AND INVESTMENTS OF MATHEMATICAL RESERVES IN LIFE INSURANCE

DOCTORAL THESIS

Mostar, 2016. year

PODACI I INFORMACIJE O DOKTORANDU

Ime i Prezime: Anela Čolak
Datum i mjesto rođenja: 9.12.1972., Široki Brijeg, Bosna i Hercegovina
Naziv završenog fakulteta i godina diplomiranja: Prirodoslovno-matematički fakultet Zagreb, 1996.
Naziv poslijediplomskog studija i godina magistriranja: Poslijediplomski znanstveni studij Poslovne ekonomije, 2011.

INFORMACIJE O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naslov disertacije: „Utjecaj poslovnih rizika na oblikovanje i plasman matematičke pričuve životnih osiguranja"

Fakultet na kojem je disertacija obranjena: Ekonomski fakultet Sveučilišta u Mostaru

POVJERENSTVA, OCJENA I OBRANA DOKTORSKE DISERTACIJE

Datum prijave disertacije: 21.6.2013.

Povjerenstvo za ocjenu teme i predlaganje mentora/ocjenu i obranu teme:
1. dr.sc. Drago Jakovčević, Ekonomski fakultet u Zagrebu – predsjednik povjerenstva
2. dr. sc. Željko Šain , Ekonomski fakultet u Sarajevu, – mentor i član
3. dr. sc. Zdravka Aljinović, Ekonomski fakultet u Splitu – član

Datum prihvaćanja teme: 10.2.2014.

Mentor: prof. dr. sc. Željko Šain

Povjerenstvo za ocjenu disertacije:
1. dr.sc. Drago Jakovčević, Ekonomski fakultet u Zagrebu – predsjednik povjerenstva
2. dr. sc. Željko Šain, Ekonomski fakultet u Sarajevu – mentor i član
3. dr. sc. Snježana Pivac, Ekonomski fakultet u Splitu – član

Povjerenstvo za obranu doktorske disertacije:
1. dr.sc. Drago Jakovčević, Ekonomski fakultet u Zagrebu – predsjednik povjerenstva
2. dr. sc. Željko Šain, Ekonomski fakultet u Sarajevu – mentor i član
3. dr. sc. Snježana Pivac, Ekonomski fakultet u Splitu – član

Datum obrane doktorske disertacije: 20.4.2016. godine

SAŽETAK

Utjecaj poslovnih rizika na oblikovanje i plasman matematičke pričuve životnih osiguranja

Životno osiguranje je složen sustav različitih parametara i varijabli koji zajedno sa inputima rezultiraju posebnom funkcijom, a to je određeni model životnog osiguranja.
Značaj životnog osiguranja je višestruk, sa sinergijskim efektima. Od esencijalne je važnosti za osiguranika i korisnika osiguranja, osobno i kolektivno; društvo za osiguranje kao biznis sa stalnim uzlaznim trendom; poslovno okruženje u kojem djeluje društvo za osiguranje, posebno u financijskim i gospodarskim okolnostima; društvenu i državnu zajednicu – kao sveukupni stabilizirajući i razvojni potencijal.
Životna osiguranja, kao oblik osobne štednje, imaju sadržajnije sastavnice i izravnije psihološke efekte na pojedince, sa većim financijskim i materijalnim afektima od klasične štednje kod banaka. Da bi se, u konačnici, postigli takvi efekti treba blagovremeno i što cjelovitije identificirati sve relevantne utjecaje poslovnih rizika na oblikovanje i plasman matematičke pričuve životnih osiguranja, te njima sustavno upravljati kako bi se postigli najracionalniji rezultati – težiti ka njihovom optimiziranju.
Osiguravatelji života oblikuju matematičku pričuvu u obujmu procijenjene sadašnje vrijednost svih budućih obveza društva za osiguranja, temeljem zaključenih ugovora o osiguranju umanjenu za sadašnju procjenjenu vrijednost budućih premija koje će biti uplaćene od ugovorenih osiguranja.
Sukladno važnosti problematike koja je u fokusu ovog rada i brojnim diskusijama koje su rezultirale nizom analiza i zaključaka o važnosti životnih osiguranja, ali s nedovoljno jasnih stavova i konkretnih rješenja, postavljeno je temeljno pitanje: *kako identificirati poslovne rizike i smanjiti njihove intenzitete prilikom oblikovanja i plasmana matematičke pričuve životnih osiguranja.*
Svrha i temeljni cilj istraživanja jeste okarakterizirati vezu i utjecaj poslovnih rizika na matematičku pričuvu životnih osiguranja.
S obzirom na ovako postavljeni cilj istraživanja glavna hipoteza istraživanja glasi:
„Poslovni rizici utječu na oblikovanje i plasman matematičke pričuve životnih osiguranja.“
Ovim istraživanjem su analizirane i sintetizirane dosadašnje teorijske spoznaje o matematičkoj pričuvi životnih osiguranja te su na temelju tih spoznaja i empirijskog

istraživanja utvrđene osobine sustava oblikovanja i plasmana matematičke pričuve životnih osiguranja u Bosni i Hercegovini.

Ovim radom se pokušalo ukazati i na potrebu aktivnijeg pristupa životnim osiguranjima s naglaskom na njihov osnovni segment, a to je matematička pričuva. Poseban problem osiguravatelja života u Bosni i Hercegovini predstavlja transparentnost i dostupnost baze podataka.

Razvijati životno osiguranje u BiH znači pratiti i koristiti iskustva osiguravatelja života razvijenih zemalja te stvarati preduvjete za efikasnije poslovanje i brži put do približavanja sustavima životnih osiguranja Europske unije.

U promjenjivim i neizvjesnim uvjetima poslovanja nameće se potreba primjene naprednih metoda procjene rizika uz istovremeno udovoljavanje zahtjevima stabilnosti i profitabilnosti poslovanja. Za uspješno praćenje utjecaja poslovnih rizika na oblikovanje i plasman matematičke pričuve pored promjena unutar samih društava za životna osiguranja nužno je razviti podržavajući instituconalni okvir koji će uvažavati iskustva i dobre prakse životnih osiguranja u razvijenim zemljama svijeta.

Ključne riječi: *rizik, oblikovanje, plasman, matematička pričuva, životno osiguranje*

SUMMARY

Influence of business risks on shaping and investments of mathematical reserves in life insurance

Life insurance is a complex system of various parameters and variables which together with various inputs results in a special function, that is, life insurance model.
Life insurance has a multiple importance, with synergistic effect. It is of essential importance for both the insurer and insured, personally and collectively; insurance company as a business with permanent upward trend; business environment in which the insurance company works, especially in financial and economic circumstances; social and state community – as overall stabilising and developing potential.
Life insurance, as a form of personal saving, has more meaningful elements and more direct psychological effects on individuals, with greater financial and material effects than conventional savings in banks. With the aim to reach those effects, as a final result, it is necessary to identify, on time and as completely as possible, all relevant impacts of business risks on forming and placement of life insurance mathematical savings, and to manage them systematically so to achieve the most rational results – striving to get their optimisation.
Life insurers form mathematical saving within the scope of estimated current value of all future insurance company liabilities, based on concluded contracts on insurance reduced by current estimated value of future premiums that will be paid by contracted insurances.
In accordance with the importance of the issues this paper is focused on as well as numerous discussions which have resulted in a number of analysis and conclusions about life insurance importance, but with very few clear attitudes and concrete solutions, the key question has been asked: *how to identify business risks and reduce their intensity when forming and placement of life insurance mathematical savings*.
The purpose and basic goal of the research is to characterize relation and influence of business risks on life insurance mathematical savings.
In this way set goal of the research leads to the following main hypothesis:
''Business risks impact forming and placement of life insurance mathematical savings.''
This research has analysed and synthesized present theoretical knowledge about life insurance mathematical savings and according to both the knowledge and empiric research the characteristics of the system for forming and placement of life insurance mathematical

savings in Bosnia and Herzegovina has been determined.

This paper is also trying to indicate the need for more active approach to life insurances emphasizing their basic segment, mathematical saving. Life insurers in Bosnia and Herzegovina face a special problem and that is transparency and data base availability.

Development of life insurance in BiH has to follow and use the experience of life insurers in developed countries and make preconditions for more effective business operations and faster approaching to life insurance systems in European Union.

Changeable and insecure conditions of business operations impose the need to apply advanced risk assessment methods together with fulfilment of demands for stable and profitable business. For successful monitoring of business risks impacts on forming and placement of mathematical saving, in addition to the changes within the insurance companies, it is necessary to develop sustainable institutional framework that will accept experiences and good practices of life insurances in developed countries in the world.

Keywords: *risk, shaping, investments, mathematical reserves, life insurance*

SADRŽAJ

1. UVOD

Temeljno pitanje u osiguranju je šteta i rizik od štete, odakle izravno proizlazi potreba za sredstvima koja će nadoknaditi nastale štete. Promatra li se šteta kao motiv za osiguranje života, štedna komponenta životnih osiguranja dobiva svoj pravi oblik jer to nije obična štednja nego posebno determinirana štednja, odnosno štednja u obliku životnog osiguranja. U danom trenutku osiguranik procjenjuje svoj budući, mogući rizik i time određuje osiguranu sumu. Pronalaženje zajedničkog modela koji će uvažiti sve komponente osiguranja iz perspektive osiguravatelja i istodobno se prilagoditi potrebama i željama osiguranika je jamstvo uspjeha životnih osiguranja.

Ne treba zanemariti ekonomski značaj životnih osiguranja kako pojedinca tako i ekonomske zajednice u cjelini. Najznačajnija funkcija životnog osiguranja je očuvanje životnog standarda osiguranika promatrano na razini pojedinca. Poseban značaj životnih osiguranja za ekonomsku zajednicu u cjelini ogleda se u dugoročnim ulaganjima sredstava matematičke pričuve što potiče razvoj financijskih tržišta i gospodarstva u cjelini, kao i utjecaj na strukturu nacionalnog dohotka.

Ako se životno osiguranje promatra i analizira kao štednja, lako se uočavaju značajne razlike u odnosu na klasični oblik štednje u bankama i štedionicama. Štednja u bankama je najčešće slobodna štednja i ne obvezuje štedišu ulaganjima kroz vrijeme. Štednja u obliku osiguranja je posve nešto drugo. Svaki oblik životnog osiguranja vezuje se za ugovoreni rok trajanja osiguranja, kroz pet, deset ili više godina, koji je izravno vezan za osiguranu sumu. Sastavnica ovome je i vjerojatnost života osiguranika. Osiguranik se za odabrani oblik osiguranja veže ugovorom kojim je specificirana i premija u određenom iznosu, kao i način uplata. Drugim riječima, životno osiguranje je dugoročna štednja koja se često imenuje kao „najsuvremenija štednja“. Razvoj osiguranja i matematičko-statističkih modela koji opisuju i određuju računske komponente osiguranja doprinijeli su kreiranju novih modela životnih osiguranja. No, razvoj novih modela osiguranja određen je standardom osiguranika čime je determiniran prvenstveno način uplata premija.

Promatrajući osnovnu funkciju osiguranja, uplatama premija se oblikuju novčana sredstva osiguravatelja, a u obliku isplata bilo osigurane sume ili renti vraćaju se u ugovorenom iznosu osiguraniku, odnosno korisniku osiguranja. U životno osiguranje mora biti uplaćeno premijama onoliko novčanih sredstava koliko će biti isplaćeno nakon isteka osiguranja uvažavajući vremensku vrijednost novca i stohastičke procese. To znači, mora vrijediti princip ekvivalencije, u protivnom sigurnost osiguranika nije osigurana.

Uspjeh i sigurnost poslovanja osiguravatelja života ovisi, prvenstveno o obračunskoj ili matematičkoj osnovi, a to su tablice smrtnosti i kamatna stopa. Pomoću njih se određuju neto premije od kojih se oblikuju sredstva dovoljna za pokriće obveza prema osiguranicima.

Životno osiguranje je ugovor sklopljen između osiguravatelja i osobe (ugovaratelja osiguranja) kojim se ugovaratelj obvezuje plaćati osiguravatelju ugovorom određenu premiju na temelju koje će osiguravatelj, kada nastupi osigurani slučaj, isplatiti osiguranu sumu osiguraniku ili korisniku osiguranja. Ukoliko se ne dogodi osigurani slučaj uplaćena sredstva se koriste za podmirenje obveza prema ostalim osiguranicima. Pojedinačni isplaćeni iznos ne ovisi o broju uplaćenih premija, ako su one višekratne, niti o proteklom vremenu trajanja osiguranja, nego je determiniran modelom životnog osiguranja koji se prezentira u ugovoru o osiguranju.

Osiguranje života će opravdati svoju pozitivnu ulogu u gospodarstvu samo ako se kontinuirano razvija i konstantno povećava broj osiguranika, a to znači mora razvijati modele osiguranja među kojima će svaki osiguranik naći, za sebe prihvatljivi model s prihvatljivom kombinacijom uplata premija. Što je ponuda modela životnih osiguranja veća to će osiguranici, odnosno korisnici osiguranja lakše naći za sebe prihvatljivi oblik osiguranja.

Modeli životnog osiguranja kod kojih se premija osiguranja plaća jedanput, radi se o osiguranju uplatom jednokratne premije, a ako se osigurana suma uplaćuje više puta u jednakim vremenskim intervalima i u jednakom iznosu radi se o osiguranju sa višekratnim uplatama premija. Uplata premija može biti više puta u jednakim vremenskim intervalima uz različite iznose pa je to osiguranje s višekratnim varijabilnim uplatama premija. Varijabilitet premija treba biti utemeljen na aritmetičkoj ili geometrijskoj progresiji.

Prema trajanju uplata premija u odnosu na trajanje života, premija se dijeli na doživotnu i privremenu. Premija je doživotna ako ju osiguranik plaća do kraja života, a privremena premija je onda ako osiguranik plaća samo ugovorom određeno vrijeme.

Prema broju isplata osigurane sume, osiguranje se dijeli na osiguranje kapitala i osiguranje renti. Ako se osigurana suma isplaćuje osiguraniku ili korisniku osiguranja jednom, riječ je o osiguranju kapitala, a ako se isplata događa u više iznosa i u jednakim vremenskim intervalima, to je rentno osiguranje. Sukladno razlikama u pojedinim modelima osiguranja kreiraju se različite kombinacije uplata i isplata u osiguranju, a neke kombinacije će biti analizirane u radu.

1.1. Predmet istraživanja

Kako se mijenja struktura osiguranja i životni standard (sukladno tome i očekivano trajanje života osiguranika), kamatna politika i oblici organiziranja (a time i troškovi osiguranika) to je oblikovanje portfelja društava za osiguranje, a posebno matematičke pričuve, pod utjecajem velikog broja promjenjivih rizika.

Društva za osiguranje su veliki ulagači na financijskom tržištu, pa samim time podliježu rizicima koji prate ulaganje kapitala. Kako su društva za osiguranje izložena riziku i pri formiranju fondova i prilikom plasmana sredstava, to je kod njih kao sudionika na tržištu izraženija potreba za što pouzdanijim metodama identifikacije, kontrole i upravljanja rizicima.

Temelj formiranja premije životnih osiguranja izravno je veza za aktuaristiku i tablice smrtnosti. Time se ističe potreba ozbiljnijeg i sustavnog kreiranja premija uz analizu rizika kako bi spomenute determinante bile adekvatno određene.

Kako su društva za osiguranje, pri formiranju portfelja za osiguranje, posebno izložena riziku vezanom za dugoročnost životnog osiguranja, a kamatna stopa je alat izravnavanja rizika u vremenu, potrebno je istaknuti identifikaciju i analizu operativnih rizika, odnosno analizu podcijenjene i precijenjene premije u odnosu na tržišnu kamatnu stopu.

Struktura plasmana sredstava društava za osiguranje mora biti s najmanjim mogućim rizikom, pa je jako bitno analizirati ulaganja kao što su ulaganja u dugoročne i kratkoročne vrijednosne papire, dionice, obveznice, nekretnine i sl.

Obavljajući svoje poslove društvo za osiguranje se izlaže različitim oblicima rizika koji utječu, izravno ili neizravno na visinu prihoda i rashoda društava za osiguranje, a time i na njihovu profitabilnost. Stoga, u svojem svakodnevnom poslovanju društvo za osiguranje bi trebalo putem usvojenih i prikladnih tehnika identificirati, mjeriti rizike i njima upravljati s ciljem zaštite od gubitaka u svojem poslovanju ili ostvarenju dodatnih prihoda.

Povezanost rizika i matematičke pričuve životnog osiguranja, odnosno osiguranja općenito je nedvojbena i čini temelj definicije osiguranja općenito.

Stoga ne čudi potreba, radoznalost i izazov koji osjećaju kako osiguratelji u praksi, aktuari tako i znanstvenici, traženja odgovora na pitanja:

- Kako identificirati utjecaj rizika na oblikovanje premija, općenito, a posebno u životnim osiguranjima?
- Kako identificirati utjecaj pojedinačnih rizika na oblikovanje matematičke pričuve životnih osiguranja?

- Kako identificirati rizike i njihov utjecaj na plasman matematičke pričuve životnih osiguranja?
- Kako kontrolirati i mjeriti identificirane rizike?

Sva dosadašnja istraživanja su potvrdila postojanje veze između poslovnih rizika i osiguravatelje djelatnosti.

Iz svega prethodno navedenog proizlazi razlog i potreba ovog rada i za njega vezanog istraživanja koje će se provesti.

1.2. Svrha i ciljevi istraživanja

Sukladno navedenim saznanjima o važnosti problematike koja je u fokusu ovog rada i brojnim diskusijama koje su rezultirale nizom analiza i zaključaka o važnosti životnih osiguranja, ali s nedovoljno jasnih stavova i konkretnih rješenja, postavlja se temeljno pitanje: *kako identificirati poslovne rizike i smanjiti njihove intenzitete prilikom oblikovanja i plasmana matematičke pričuve životnih osiguranja.* Svrha i temeljni cilj istraživanja jeste okarakterizirati vezu i utjecaj poslovnih rizika na matematičku pričuvu životnih osiguranja. S ciljem proširivanja znanstvenih i pragmatičnih spoznaja kroz ovo istraživanje su realizirani u nastavku definirani znanstveno-spoznajni i operativno-praktični ciljevi.

Znanstveno-spoznajni ciljevi mogu se opisati kroz četiri temeljne kategorije znanstvene logike: klasifikaciju, deskripciju, eksplanaciju i prognoziranje. Sukladno navedenom provedene su slijedeće aktivnosti:

- Istraženi su i analizirani svi relevantni pojmovi i koncepti iz područja koje je predmet proučavanja. Izdvojeni i analizirani pojmovi i koncepti sintetizirani su klasificirani prema kategorijama koje su u interesu istraživanja, poput rizika pribave osiguranja, rizika plasmana matematičke pričuve, operativni rizici i njihovog utjecaja na oblikovanje neto premije životnih osiguranja i povećanja obujma matematičke pričuve i sl.
- Istraženim, analiziranim pojmovima i konceptima opisan je dosadašnji teorijski i empirijski rezultat i nalazi u definiranom području, kao što je zastupljenost pojedinih modela životnih osiguranja, načini uplata i isplata, vrste premija, struktura ulaganja matematičke pričuve, rizici koji se kontroliraju i kako upravljati rizicima i sl.
- Eksplicirana je utjecaj pojedinih rizika na kreiranje neto premije u modelima životnih osiguranja, a samim time i na oblikovanje matematičke pričuve, utjecaj poslovnih rizika na ostvareni obujam matematičke pričuve. Osim toga eksplicirana je zakonitost utjecaja

poslovnih rizika na oblikovanje i plasman matematičke pričuve, te definirana je funkcijska povezanost između navedenih varijabli.

- Temeljem znanstvenih spoznaja na kojima su definirane hipoteze istraživanja kreiran je model utjecaja poslovnih rizika na oblikovanje i plasman matematičke pričuve uz očuvanje definirane likvidnosti, solventnosti i profitabilnosti.

Operativno-pragmatični ciljevi manifestiraju se kroz definiranje preporuka u smjeru veze između poslovnih rizika i matematičke pričuve što ukazuje na važnost boljeg razumijevanja poslovnih rizika u kontekstu oblikovanja i oplodnje sredstava matematičke pričuve životnih osiguranja. Za osiguravatelje koji se bave životnim osiguranjima značajno je i utvrđivanje odnosno sagledavanje postojećeg stanja u sektoru životnih osiguranja. Istraživanje je ponudilo sliku o trenutnom stanju u životnim osiguranjima, kao osnovu za kritičke analize i projiciranje mogućih trendova.

Istraživanjem je ispitana proporcionalnost između poslovnih rizika i matematičke pričuve. Ne manje bitno, a osiguravateljima koji se bave životnim osiguranjima važno je utvrđivanje intenziteta veze, njihovih osnovnih karakteristika i posljedice na solventnost društva. Istraživanje donosi i određene zaključke, prijedloge odgovarajuće mjerne tehnike, aktuarske modele i metode i time doprinos sigurnijoj solventnosti i likvidnosti osiguravatelja života te dostizanje moguće profitabilnosti

1.3. Metode istraživanja

Istraživanje koje je rađeno za potrebe ove disertacije može se podijeliti na dva osnovna tipa, istraživanje za stolom i istraživanje na terenu, pri čemu se, u okviru njih, koristile i različite metode istraživanja čija svrha primjene jest dolazak do novih znanstvenih i pragmatičnih spoznaja i znanja.

U prvom dijelu istraživanja, *istraživanjem za stolom,* prikupljeni su postojeći, tzv. sekundarni podaci o razmatranoj problematici temeljem čega se izradio teorijski dio rada. U ovoj disertaciji istraživanje za stolom se prvenstveno odnosilo na pribavljanje relevantnih znanstvenih članaka i knjiga. Osim prikupljanja i analiziranja relevantne literature u okviru prvog dijela istraživanja za izradu teorijskog dijela rada u kojem su prezentirana postojeća saznanja iz područja razmatrane problematike primijenjene su brojne opće metode znanstvenog istraživanja, od kojih su za ovo istraživanje najrelevantnije; *metoda analize* kojom su objašnjenja kreirana putem raščlanjivanja složenijih, već poznatih pojmova, sudova postavki i zaključaka na njihove jednostavnije sastavnice kako bi se dobila ukupno jasnija slika predmeta istraživanja; *metoda sinteze* kojom se vršilo povezivanje jednostavnijih misaonih tvorevina u složenije, a sve opet u cilju boljeg, sistematičnijeg proučavanja i shvaćanja odnosa među osnovnim elementima predmetnog istraživanja; *metoda generalizacije* kojom se od pojedinačnih zapažanja (pojmova) došlo do uopćenijih zaključaka primjenjivih na predmetno istraživanje; *metoda indukcije i dedukcije* kojima su doneseni potrebiti zaključci o predmetnim pojavama, bilo na način da se izvode od općeg prema pojedinačnom (u teorijskom dijelu) ili pak obrnutim slijedom (u empirijskom dijelu); *metoda apstrakcije i konkretizacije,* kojima su se putem razlikovanja bitnih od nebitnih elemenata određenih pojava misaonim postupkom odvajali nebitni a istaknuti bitni elementi predmeta istraživanja; *deskriptivna i komparativna metoda* kojima su oslikavani pojmovi, zakonitosti, činjenice, procesi iz dva promatrana znanstvena područja, a nakon toga su vršeni postupci uspoređivanja i utvrđivanja odnosa kako bi se došlo do novih spoznaja i zaključaka o predmetu istraživanja.

Drugi tip istraživanja odnosni se na tzv. *terensko istraživanje,* a njegova provedba primjenom odgovarajućih metoda je od krucijalnog značaja za empirijski dio ovog istraživanja. Istraživanje je provedeno na području Bosne i Hercegovine i to u sektoru životnih osiguranja. Broj osiguravatelja koji u svom portfelju imaju životna osiguranja je sedam u Federaciji Bosne i Hercegovine i tri društva za osiguranje u Republici Srpskoj. Za usporedbu strukture ulaganja uzeti su podaci iz Republike Hrvatske i zemalja Europske unije.

Centralno mjesto u ovom dijelu istraživanja pripada *statističkoj metodi obrade podataka* kojom se, pomoću softverskog paketa SPSS, analizirala struktura portfelja osiguravatelja života na financijskom tržištu. Osim metode obrade podataka korištene su *metode prezentiranja rezultata istraživanja* kojima su analizirani podaci predstavljeni putem raznih vrsta grafičkih prikaza radi zornijeg predočenja rezultata. Osim grafičkog prikaza statističkih podataka i njihove interpretacije, korišteni su tabelarni prikazi nekih izlaznih analiza, radi jednostavnijeg, sigurnijeg i kvalitetnijeg uspoređivanja razdiobe ulaganja životnih osiguranja u Bosni i Hercegovini, razdiobe ulaganja osiguravatelja u Republici Hrvatskoj i razdiobe ulaganja osiguravatelja razvijenih europskih zemalja.

1.4. Hipoteze istraživanja

Eksplikacija problema za koji je vezan ovaj istraživački rad oblikovala je glavnu istraživačku hipotezu. Kako bi se što bolje i efikasnije objasnila matematička pričuva životnih osiguranja sa svim rizicima koji ju prate od oblikovanja, ali i tijekom njenog rasta i razvoja, odnosno plasmana i povećanja njenog obujma definirana je glavna hipoteza :

H0: Poslovni rizici utječu na oblikovanje i plasman matematičke pričuve životnih osiguranja.

Polazna hipoteza definirana je s ciljem davanja odgovora na pitanje intenziteta i smjera veze između poslovnih rizika i matematičke pričuve životnih osiguranja. Kako se mijenja struktura osiguranja i životni standard (sukladno tome i očekivano trajanje života osiguranika), kamatna politika i oblici organiziranja (a time i troškovi osiguravatelja) to je oblikovanje portfelja društava za osiguranje, a posebno matematičke pričuve, pod utjecajem velikog broja promjenjivih rizika.

Društva za osiguranje su veliki ulagači na financijskom tržištu, pa samim time podliježu rizicima koji prate ulaganje kapitala. Kako su društva za osiguranje izložena riziku i pri formiranju fondova i prilikom plasmana sredstava , to je kod njih kao sudionika na tržištu izraženija potreba za što pouzdanijim metodama identifikacije, kontrole i upravljanja rizicima. U svrhu provjere postavljene glavne hipoteze postavljene su pomoćne hipoteze kako bi se što bolje i iscrpnije analizirao i objasnio problem istraživanja.

Pomoćnim hipotezama H1 promatrat će se određenost veličine matematičke pričuve u trenutku njenog oblikovanja.

H1: Veličina matematičke pričuve određena je izračunima u aktuarskim tablicama i veličinom neto premije.

Osnovna zadaća osiguranja sastoji se u naknadi štete osiguranicima ili isplati osigurane sume novca u iznosu koji je određen ugovorom o osiguranju. Kako bi ispunio tu zadaću osiguravatelj mora, temeljem uplaćenih premija, osigurati dovoljno sredstava da u svakom trenutku može ispuniti svoje obveze. Dakle, za ispunjenje svoje zadaće, a da pri tome ne ugrožava svoju likvidnost, osiguravatelji trebaju odrediti odgovarajuću visinu premije. Obračun premije je temeljni zadatak aktuarske matematike.[1] Određivanje visine premije u životnom osiguranju determinirano je tablicama smrtnosti i obračunskom kamatnom stopom. Tablice smrtnosti temelj su za određivanje iznosa neto premije u životnom osiguranju, a određuju se iz baze podataka iz popisa stanovništva i na temelju podataka o smrtnosti

[1] Aktuarska matematika je dio primijenjene matematike, koja se bavi matematičkim temeljima osiguranja. Temeljen pretpostavke koje treba zadovoljiti osigurani događaj su: disperzija rizika, homogenost rizika i učestalost rizika.

stanovništva u odabranim godinama. Kako se smrtnost stanovništva mijenja to pri izračunu premija treba procijeniti pouzdanost tablica smrtnosti i uzeti je u obzir. Prilikom svake procijene javlja se vjerojatnost pouzdanosti procjene, a nasuprot vjerojatnosti rizik procjene. Stoga je matematička pričuva, kao dio neto premije, osjetljiva na rizike od samog formiranja premije osiguranja. S druge pak strane obračunska kamatna stopa se mijenja u skladu sa kretanjima na financijskim tržištima, tako će veća obračunska kamatna stopa utjecati na smanjenje cijene osiguranja, ali precijenjena kamatna stopa može dovesti do nesolventnosti osiguravatelja. Problem obračuna premije jedno je od ključnih pitanja u poslovima osiguranja: ako je premijska stopa previsoka osiguravajuće društvo neće imati dovoljno klijenata za uspješan rad. Ako je premijska stopa premije preniska, osiguravajuće društvo ne može imati dovoljno sredstava za plaćanje svih potraživanja.[2]

U trenutku kreiranja modela za određivanje premije životnog osiguranja značajnu ulogu imaju odabrani model i proizvod životnog osiguranja.

H2: Veličina matematičke pričuve uvjetovana je modelom i proizvodom životnog osiguranja.

Ukamaćeni štedni dio premije tijekom trajanja osiguranja se akumulira i oblikuje matematičku pričuvu. Sredstva matematičke pričuve su u određenom trenutku slobodna i mogu se plasirati na financijskim tržištima. Posve je jasno da konačni obujam matematičke pričuve ovisi o veličini štednog dijela premije u svakom trenutku budući je taj dio slobodan za plasman. Ovdje se prepoznaje važnost odabranog modela i proizvoda životnog osiguranja. Naime, o modelu i odabranom proizvodu ovisi periodičnost uplata i isplata, iznos uplata i isplata, a time je u svakom promatranom periodu određen iznos slobodnih sredstava odnosno oblikovane matematičke pričuve.

Društva za osiguranje, općenito pa tako i ona koja se bave životnim osiguranjima su dio gospodarstva svake države i društva i time izložena i opterećena svim problemima poslovanja. Jedan od problema je svakako i problem efikasne naplate. To je razlog koji je u ovom istraživanju implicirao definiranje slijedeće pomoćne hipoteze.

H3: Oblikovanje matematičke pričuve ovisi o efikasnosti naplate neto premije.

Svakom društvu za osiguranje je osnovni cilj povećati broj klijenata, odnosno osiguranika jer time povećava vjerojatnost ostvarenja bolje, efikasnije i sigurnije solventnosti. Težiti povećanju broja osiguranika znači istodobno izlagati se riziku naplate neto premije. Sredstva koja oblikuju matematičku pričuvu planirana su u trenutku sklapanja ugovora odnosno

[2] Melnikov, A., Risk analysis in finance and insurance, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London New York Washington, 2004., str. 129.

prodajom police osiguranja, ali time proces oblikovanja nije završen jer ostaje problem naplate koji je u posljednjih nekoliko godina u vrijeme globalne ekonomske krize postao intenzivniji. S početkom razvoja svakog ugovora o životnom osiguranju osjetan je i utjecaj operativnog rizika nedostatne matematičke pričuve životnih osiguranja. Kako su životna osiguranja na dugi vremenski rok postoji vjerojatnost nastanka promjena ili konverzija. Glavni preduvjet konverzije je postojanje stvarne ili možda hipotetske razlike između ugovorom preciziranog modela životnog osiguranja i novonastale situacije u okruženju ili kod ugovornih strana. Moguće razlike su najčešće izvan utjecaja ugovornih strana životnog osiguranja. Novonastala situacija u okruženju može biti rezultat mjera monetarno-kreditne i fiskalne politike, zatim razlog joj se može nalaziti u stopi inflacije, u stopi kupovne moći i sl.[3] Sve to može rezultirati slabom naplatom neto premije.

Sva društva za osiguranje pa tako i ona koja se bave životnim osiguranjem posluju u skladu s pravnim okvirom države i prostora u kojem djeluju. Pravni okvir se razlikuje ovisno u kojoj državi društvo posluje zato se u ovom istraživanju definirala slijedeća pomoćna hipoteza.

H4: Oblikovanje matematičke pričuve određeno je pravnim okvirom u kojem osiguravatelj posluje.

Svaka država ima svoje zakonske regulative prema kojima posluju društva za osiguranje, posebno su pravnim propisima obuhvaćena životna osiguranja kako bi se zaštitili osiguranici od prevelikih rizika. To se očituje prvenstveno u zakonom propisanom okviru unutar kojeg se mogu plasirati sredstva matematičke pričuve. Ako je društvo za osiguranje registrirano u Bosni i Hercegovini koja je uređena entitetski, osiguravatelj radi prema entitetskom zakonskom okviru, ima agenciju za osiguranje na razini entiteta i agenciju za osiguranje na razini države. Sve navedeno opravdava postavljenu pomoćnu hipotezu.

Cilj svakog osiguratelja je, ne samo prikupiti premije nego i dugoročno gledano povećati vrijednost svojih financijskih sredstava, a to uvjetuje aktivno sudjelovanje na financijskom tržištu. Odavde slijedi definiranost pete pomoćne hipoteze u ovom istraživačkom radu.

H5: Struktura investicijskog portfelja ovisi od ambijenta u kojem osiguravatelj posluje te o tržišnim rizicima.

Biti aktivan sudionik na financijskom tržištu, osiguravatelju neizostavno donosi utjecaj tržišnih rizika volatilnosti financijske imovine. Tržišni rizici su množina, a vezani su za kamatni rizik, valutni rizik i rizik vlasničkih vrijednosnica. Dakle osiguravatelje opterećuje

[3] Šain, Ž.: Aktuarski modeli životnih osiguranja II. dio Primjena aktuarske matematike, Ekonomski fakultet Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo, 2010. str., 177.

.

rizik vezan za vrijeme i to sa aspekta plasmana sredstava na financijskom tržištu. Stoga i u ovom segmentu životnih osiguranja matematičko-financijski modeli su od krucijalne važnosti i ne samo oni nego i matematički modeli stohastičkih procesa.

Utjecaj vremena je intenzivan kod životnih osiguranja jer su životna osiguranja vezana za tržišne uvjete duži vremenski period (doživotno osiguranje, osiguranje za slučaj doživljenja, mješovita osiguranja se vežu obično za 5, 10, 15 ili 20 godina,…). Premija je stalan novčani iznos, a vrijednost novca se sa protokom vremena mijenja to implicira zaključak kako se stvarna vrijednost premije također mijenja. Drugim riječima kamatna stopa izravno predstavlja temelj oblikovanja i obračuna premije i trebala bi, kod životnih osiguranja, biti nepromjenjiva tijekom dužeg vremenskog perioda. Ako je kamatna stopa varijabilnija tijekom vremena izloženost riziku je veća.

Troškovi koji nastaju za vrijeme trajanja osiguranja su troškovi koji su vezani za vrijeme i načine prikupljanja premija osiguranja i kao takvi vezani su i za nastale rizike tijekom spomenutog vremena, a i za investicije.

Troškove vezane za likvidaciju šteta čine svi troškovi koji se događaju prilikom likvidacije šteta.

Troškovi osiguranja zauzimaju posebno mjesto u životnim osiguranjima iz jednostavnog razloga dužine trajanja ovih vrsta osiguranja i načina njihove pribave. Neprikladni visoki troškovi osiguranja mogu značajno utjecati na visinu premije, što implicira moguću nekonkurentnost društva za osiguranje. To je dovoljan razlog za nastojanje smanjenja troškova za osiguranje što je moguće više. Pri tome osiguravatelj mora imati na umu i postojanje rizika da se i neadekvatno niskim obračunom troškova može ugroziti likvidnost poslovanja.

Sve navedene rizike osiguratelji trebaju identificirati, kontrolirati i konačno upravljati njima kako bi svoje poslovanje učinili profitabilnim. Radi svih spomenutih rizika životno osiguranje je, može se reći, jedan stohastički proces, proces u kojem se tijekom trajanja ugovora događaju određene promjene uzrokovane različitim rizicima i ne samo rizicima.

Svrha postavljanja znanstvenih hipoteza ne leži samo na teorijskom istraživanju nego proces znanstvenog istraživanja treba sadržavati i empirijsko istraživanje i na temelju dobivenih rezultata provjeriti postavljene hipoteze. Budući su u hipotezama izrečeni pretpostavljeni odnosi među pojavama to će provjeravanje hipoteza značiti ujedno i zaključak o međudjelovanju istraživanih varijabli.

1.5. Struktura rada

Rad je podijeljen u sedam dijelova i zaključna razmatranja. Na kraju rada dodatak su sažetak na hrvatskom i engleskom jeziku.

U prvom poglavlju (uvodnom dijelu) definiran je i objašnjen predmet istraživanja, objašnjena je svrha i opisani su spoznajni i praktični ciljevi koji su ovim istraživanjem ostvareni. U ovom dijelu rada opisane su i znanstvene metode koje su se koristile u teorijskom i empirijskom dijelu istraživanja, te je izložena struktura rada u završnom dijelu ovog poglavlja.

U drugom poglavlju uvedeni su osnovni pojmovi životnog osiguranja. U prvom djelu poglavlja ukratko su analizirane karakteristike životnih osiguranja u smislu njegove matematičko-financijske funkcije. U drugom dijelu ovog poglavlja slijedi kratak opis osnovnih pojmova u životnom osiguranju: premija i matematička pričuva. Na kraju naglasak je na značaju životnih osiguranja.

U trećem poglavlju prikazana je analiza i modeliranje tablica smrtnosti. Tablice smrtnosti zajedno sa kamatnom stopom predstavljaju računski temelj za izračun neto premija. Zato su tablice smrtnosti nezaobilazni segment u životnim osiguranjima, a time i pri oblikovanju matematičke pričuve. Stoga se u ovom poglavlju obrađuju pojmovi vjerojatnosti smrtnosti, preostali životni vijek kao kontinuirana slučajna varijabla i potom intenzitet smrtnosti. U završnom dijelu ovog poglavlja analizirane su neke funkcije razdiobe vjerojatnosti ili zakoni smrtnosti i na kraju modeliranje životnog vijek.

U četvrtom dijelu rada naslov je Modeli životnih osiguranja. Modeliranje životnih osiguranja inducirano je raznim faktorima s različitih aspekata i kao rezultat je cijela lepeza proizvoda životnih osiguranja. U ovom dijelu rada riječ je o osnovnim modelima životnih osiguranja, varijacijama u životnim osiguranjima i trajanju osiguranja.

Peto poglavlje posvećeno je aktuarskoj matematici u životnim osiguranjima. U prvom dijelu je obrađen stohastički pristup obračunu neto premija u životnom osiguranju. Nasuprot ovom pristupu u nastavku je obrađen statistički pristup obračunu neto premije u životnim osiguranjima. Drugi dio ovog poglavlja rezerviran je za aktuarsku matematiku kroz određivanje komutativnih brojeva i na kraju oblikovanje matematičke pričuve kao štednog dijela neto premije.

U šestom poglavlju je analiziran utjecaj poslovnih rizika na obujam matematičke pričuve. Svoj obujam matematička pričuva mijenja plasmanom na financijskim tržištima, a pri tome je izložena skupini tržišnih rizika pa u ovom dijelu je riječ o modeliranju rizika u osiguranju. Slijedi analiza društava za osiguranje u ulozi investitora na financijskom tržištu, zatim pitanje solventnosti i kreiranja portfelja. U završnom dijelu ovog poglavlja ukratko o disperziranju rizika i rizicima reosiguranja.

U sedmom poglavlju prezentirani su rezultati empirijskog istraživanja na način kako su kreirane istraživačke hipoteze. Tako ovo poglavlje ima šest dijelova izravno vezanih za model istraživanja.

U osmom poglavlju su iznesena zaključna razmatranja i analiza empirijskih rezultata slijedom postavljenih hipoteza. Naglasak u sažetku je na svojevrsnom testiranju postavljenih hipoteza.

2. ŽIVOTNO OSIGURANJE

Životno osiguranje je izuzetno kompleksna kategorija, izuzetno kompleksan teorijski i praktični sustav. Sustav koji je pun parametara i varijabli, ne konačan broj inputa koji daju rezultantu esencijalne važnosti ne samo za osiguranika i korisnika osiguranja, nego za širu socijalnu skupinu, gospodarstvo, društvo, državu …[4]

Životno osiguranje je posebna vrsta osiguranja sa svim svojim specifičnostima. Osiguranje života se odnosi na sva osiguranja kod kojih prestankom ili trajanjem života jedne ili više osoba (osiguranika) događa se isplata osigurane sume koju mora osigurati društvo za osiguranje. Drugim riječima životno osiguranje predstavlja ugovor kojim se osiguratelj, za naplaćene premije, obvezuje na isplatu osiguranoj osobi određeni iznos ili rentu u slučaju smrti ili u slučaju doživljenja definiranog u ugovoru.

2.1. Karakteristike životnog osiguranja i njegovo matematičko-financijsko funkcioniranje

Karakteristika životnog osiguranja je i u tome što, osim funkcije osiguranja, predstavlja i specifičan oblik dugoročne štednje. Ta dugoročnost i štednja životnom osiguranju daje posebnu važnost u suvremenom životu i financijama, pa se nerijetko životnom osiguranju, očitovanom u polici životnog osiguranja, pridružuje važnost vrijednosnog papira. Upravo zbog dugoročnosti, društva za osiguranje, koja se bave životnim osiguranjima, imaju važnu ulogu investitora na financijskom tržištu, a time i ozbiljnu zadaću identifikacije, kontrole i upravljanja rizicima ulaganja.

Kako je rizik smrti, u osiguranju života, promjenljiv i u vremenu se progresivno povećava, a plaćena premija bi trebala pokrivati rizik smrti u svakom trenutku, tako bi premija rasla sukladno vjerojatnosti smrti. Ovako određena premija, suglasna sa tablicama smrtnosti, je prirodna premija. Na taj način premija bi vremenom rasla i u kasnim godinama života dodatno opterećivala osiguranu osobu što bi povećavalo vjerojatnost raskida ugovora o osiguranju. Kako bi se izbjeglo ovakvo plaćanje premije, rješenje se traži u plaćanju prosječne premije koja je konstantna tijekom trajanja osiguranja. Time je u ranijim godinama premija veća od prirodne premije, a s vremenom se izjednačava s njom, što u poznim godinama dovodi do premašenosti prirodne premije. Budući je u prvim godinama osiguranja prosječna premija

[4] Šain, Ž., ibidem, str., 5.

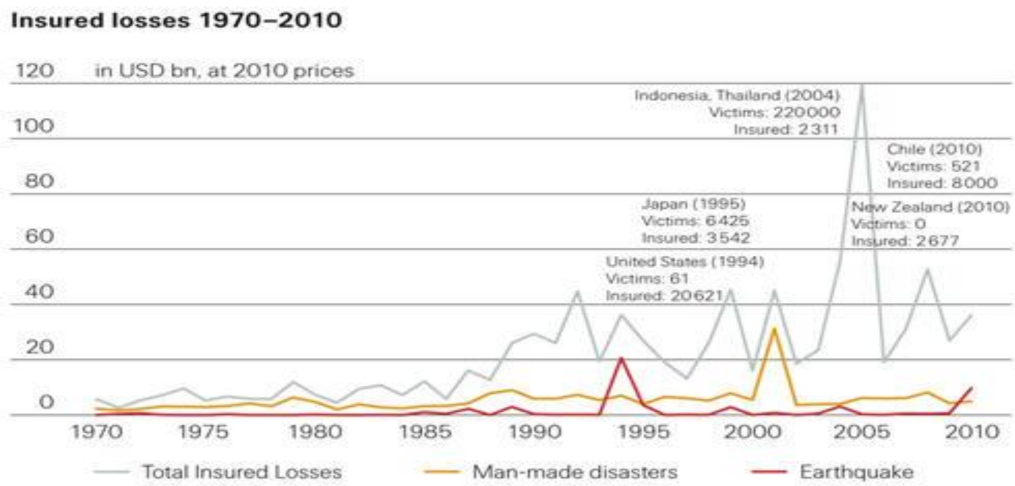
veća od prirodne, osiguravatelj izdvaja višak sredstava od kojih se oblikuje premijska pričuva, a koja će kasnije služiti za pokriće obveza prema osiguraniku u kasnijim godinama.

Ukamaćeni štedni dio premije tijekom trajanja osiguranja se akumulira i oblikuje matematičku pričuvu. Kako su ova sredstva u određenom vremenskom periodu slobodna mogu se plasirati na financijskom tržištu. Plasmanom na financijskom tržištu društvo za osiguranje ulazi u sustav koji leži na matematičko – financijskim modelima. Oblikovana matematička pričuva izlaže se tržišnim rizicima, koji se identificiraju i kontroliraju primjenom različitih matematičko – financijskih modela i zakona vjerojatnosti. Plasman matematičke pričuve u nekim zemalja nije precizno zakonski reguliran i često ovisi o poslovnoj politici društva za osiguranje. Matematička pričuva je karakteristika životnog osiguranja pa time još više naglašava specifičnost životnog osiguranja.

Rizici i štete koje su uzrok osiguranja konstantno se povećavaju, kako u pogledu nastajanja novih vrsta osiguranja, tako i u proširivanju postojećih.

Štete koje se javljaju slikovito se mogu prikazati kroz najveće štete koje su se dogodile u svijetu u zadnjih dvadesetak godina: 1989. godine šteta koju ie izazvao uragan Hugo u Puerto Rico-u koji je uzeo 61 ljudski život, procijenjena je 5 427 milijuna dolara; Oluja Darija u Europi 1990. uzela je 95 žrtava, a nastala šteta je iznosila oko 5 636 milijardi dolara; 1991. godine oluja Mireille u Japanu odnijela je 5 života i prouzrokovala štetu od 6 542 milijuna dolara, 1992. godine uragan Andrew u SAD-u odnio je 38 žrtava, a nastala šteta je iznosila 18 286 milijuna dolara; 1994. godine potres u Južnoj Kaliforniji izazvao je štetu koja je procijenjena na 13 529 milijuna dolara uz 60 ljudskih žrtava.

Slika 1. Velike svjetske katastrofe prema osiguranim gubicima

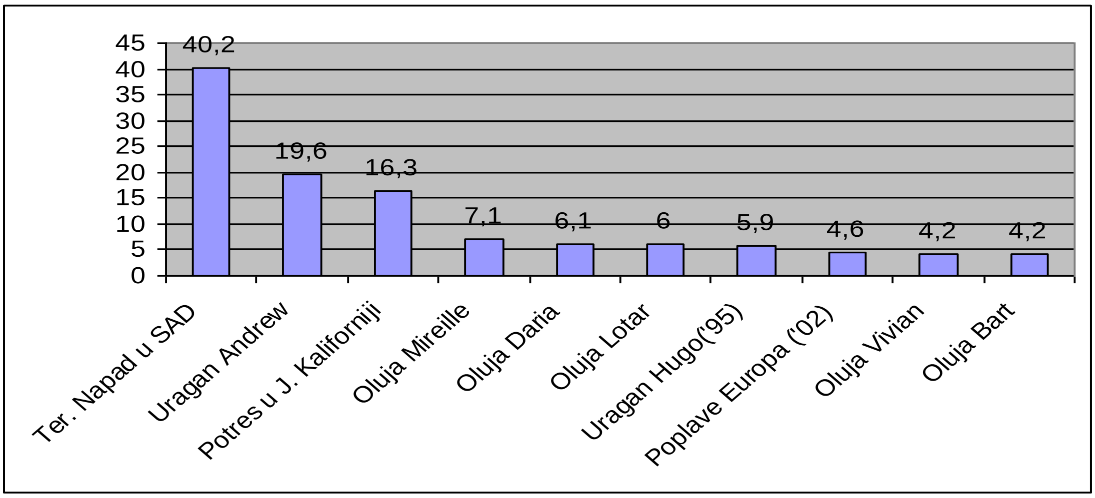


Izvor: Swiss Re Sigma study: 2011.

Sa slike 1 se vidi stalni rast ukupnih osiguranih gubitaka, katastrofe uzrokovane ljudskim faktorom nakon 2000. godine blago stagniraju, dok osigurani gubici uzrokovani potresom pokazuju rast u 2010. godini.

Na slijedećem grafikonu prikazane su velike svjetske katastrofe, ali ne po opsegu razaranja ili prema broju žrtava, nego prema vrijednostima koje su isplatila društva za osiguranje.

Grafikon 1. Velike svjetske katastrofe prema osiguranim gubicima

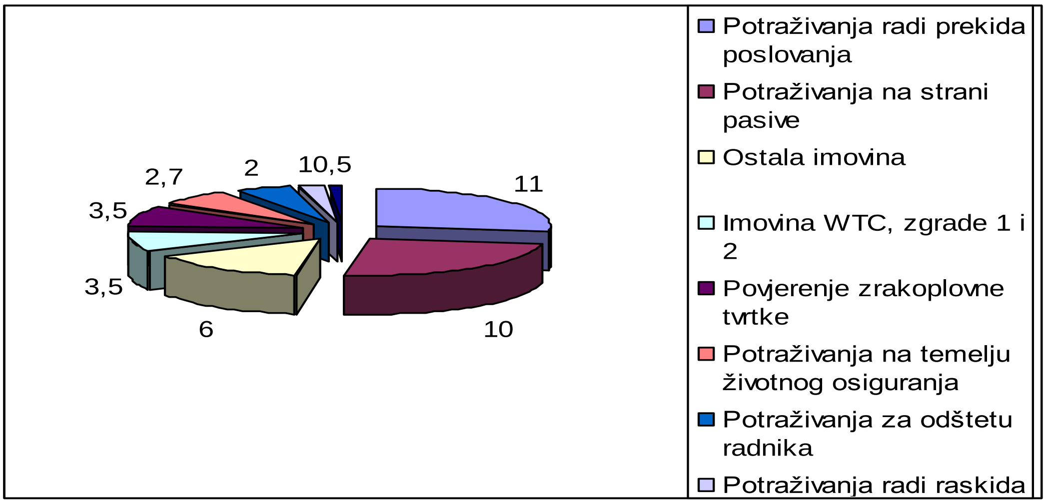


Izvor: Prezentacija Terrorisam & Its Impacts on Insurance and Reinsurance Market, Insurance Information Institute, New York 2002, str. 10.

Najveći preokret u razvoju novih vrsta osiguranja, opsegu i visini premije, dogodio se nakon 11. rujna 2001. godine, nakon terorističkog napada na svjetski trgovački centar u New York-u koji je po nekim procjenama uzeo preko 3300 života, a procijenjena materijalna šteta, koja je osigurana, je oko 40,2 milijarde dolara.[5]

[5] Insurance Information Institute

Grafikon 2. Osigurani gubici u napadu na WTC, 11.rujna 2001.



Izvor: swiss Re Sigma No.5/2002. str.13.

Događaji od 11. rujna utjecali su na sva tržišta, ali najviše na tržište dionica i tržište osiguranja. Posljedice ovih događaja sa aspekta osiguranja ogledaju prvenstveno u tome što se povećala svijest o riziku i kod osiguratelja i kod osiguranika, a s druge strane smanjila se mogućnost ulaganja uz mali rizik. Osiguranja sa fiksnim premijama su postala rizična za osiguratelje, a potražnja za osiguranjem sa varijabilnim premijama je opala. Cijene osiguranja (premije) su porasle, ali se i pored toga njihova realna vrijednost smanjuje.[6]

Prema dostupnim podacima životna osiguranja u 2001. godini bilježe znatan pad promatrano kroz ukupnu premiju, za razliku od neživotnih osiguranja. Objašnjenja se nalaze upravo u događajima u SAD-u.[7]

Preliminarni podaci za 2010. godinu, koje su plasirani od strane Swiss Re sigme, pokazuju da prirodne katastrofe i katastrofe kojima je uzrok čovjek donijele su ekonomski gubitak od 222 milijarde američkih dolara, a osigurani gubici su procijenjeni na 36 milijardi USD.

Značaj osiguranja se ogleda i u tome što je ukupna premija osiguranja na svjetskom tržištu premašila 4 000 milijardi američkih dolara sa tendencijom rasta.

Sredstva premijske pričuve, karakteristična za životna osiguranja, se u razvijenim zemljama investiraju u dionice, obveznice, nekretnine, hipotekarne kredite i neke druge vrijednosne papire, te je jasno vidljiv značaj životnih osiguranja kao investitora na financijskom tržištu što svakako utječe i na gospodarski rast, općenito.

[6] Swiss Re Sigma No. 5/2002. str. 13.
[7] Swiss Re Sigma No. 6/2002. str.6.

Osiguranje osoba, a time i životno osiguranje ima elemente štednje, što dodatno potiče njegov rast i razvoj pogotovo u razvijenim zemljama, ali i pad korištenja proizvoda životnog osiguranja u nestabilnim gospodarskim sustavima.
Životno osiguranje nudi dugoročnu zaštitu osiguranicima jedino ako su osiguranici sigurni u to da će naknada u slučaju smrti ili doživljenja imati vrijednost koju je imala u trenutku sklapanja ugovora o osiguranju. Stoga je bitno istaknuti važnost „dobro uloženih“ sredstava osiguranja iz pozicije osiguratelja.
Plasirati sredstva osiguranja tako da ona zadrže svoju realnu vrijednost i ne samo to nego i da povećaju svoju vrijednost znači prvenstveno identificirati i minimizirati rizike plasmana sredstava.

2.2. Premija osiguranja i oblikovanje matematičke pričuve

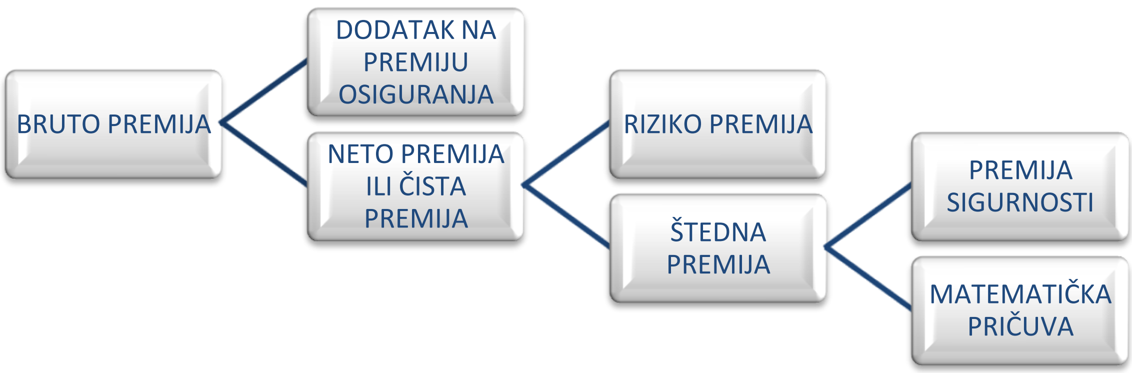
Na određenom broju osiguranih objekata (kod osiguranja imovine) ili osoba (kod životnih osiguranja), u tijeku trajanja osiguranja, ostvaruju se osigurani slučajevi. Ugovorene gubitke nastale pri osiguranom slučaju ili iznose osiguranja pokriva društvo za osiguranje. Sredstva iz kojih se vrši pokrivanje uništenih vrijednosti, odnosno isplate osiguranih iznosa, društvo za osiguranje formira na temelju uplata osiguranika – premija i primjerene oplodnje privremeno slobodnih novčanih sredstava. Premija osiguranja koju osigurana osoba uplaćuje, predstavlja cijenu usluge i ovisna je o veličini isplatnog iznosa i troškova osiguravatelja.
Premija, koja se izračunava unaprijed i čija je uplata uvjet valjanosti ugovora o osiguranju, karakteristika je premijskog osiguranja, za razliku od uzajamnog (gdje se vrijednost uplate osiguranika računa diskontiranjem, kada je poznat ukupan iznos šteta), socijalnog (gdje visina uplate ovisi o visini dohotka osiguranika) ili obveznog osiguranja (koje je zakonom određeno, pa se šteta pokriva iz proračuna).
I pored toga što neki autori definiraju premiju kao cijenu rizika, premija predstavlja cijenu osiguranja, jer pored rizika na njeno oblikovanje utječu i drugi elementi. Visina premije je proporcionalna veličini rizika, vrijednosti osigurane sume i vremenu trajanja osiguranja, a obrnuto je proporcionalna visini kamatne stope uz koju se plasiraju sredstva osiguravajućeg fonda.
Promatrajući iz uloge osiguravatelja premija se sastoji od više dijelova, od kojih su neki specifični za životno osiguranje. Kao što je navedeno, premija životnih osiguranja nije prirodna premija, koja je u skladu sa razinom i intenzitetom rizika navedenih u tablicama smrtnosti, već prosječna premija ili varijabilna premija (po zakonitostima aritmetičke ili

geometrijske progresije) čija je vrijednost takva da je u prvim godinama osiguranja iznad prirodne, a u poznim manja od prirodne premije. Na taj način, u prvim godinama životnog osiguranja oblikuju se sredstva koja će nadomjestiti niže uplate u kasnijim godinama, i time životno osiguranje predstavlja specifičan oblik štednje.

Premija koju uplaćuje osiguranik ili bruto-premija sastoji se od dva dijela i to tehničke ili čiste premije koja služi za izravnavanje rizika u osiguranju i njen iznos u osiguravajućem fondu trebao bi biti jednak iznosu ugovorenih isplata u nastupajućem vremenu trajanja osiguranja uvažavajući vremensku vrijednost novca i stohastičke procese. Drugi ili preostali dio premije naziva se dodatak na premiju osiguranja koji služi za pokrivanje troškova osiguranja. U neživotnim osiguranjima neto premija bi se mogla izjednačiti sa premijom rizika, ali iz već navedene karakteristike premije životnog osiguranja neto premija se sastoji iz riziko premije i štedne premije. Riziko premija odgovara riziku za određeni vremenski period i ona je u neto premiji izvor sredstava iz kojih se pokrivaju sve štete koje nastanu u tom periodu, odnosno ona služi za prostorno izravnavanje rizika. Štedna premija se tijekom vremena transformira u operativnu riziko premiju i temeljem principa ekvivalencije, u konačnici, sav se iznos isplati korisniku osiguranja za izravnanje ugovorenog rizika.

Riziko premija u osiguranju života je onaj dio neto-premije koji služi za pokriće rizika između ugovorene svote i matematičke pričuve u slučaju nastupa osiguranog događaja u tekućoj godini osiguranja. Tako će u mješovitom osiguranju života riziko premija svih osiguranika te vrste osiguranja služiti za pokriće razlike između ugovorene svote i matematičke pričuve u slučaju ranije smrti osiguranika.[8]

Slika 2. Struktura bruto premije životnog osiguranja



Izvor: Kočović, J.: Aktuarske osnove formiranja tarifa u osiguranju lica, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd, 2004., str. 38.

[8] Ćurković, M., Jakovčević, D.: Osiguranje i rizici, RRIF plus-d.o.o., Zagreb, 2007., str. 225.

Štedna premija, kao posebna karakteristika životnog osiguranja, služi za pokrivanje budućih „šteta" – ugovorenih isplatnih iznosa u godinama koje slijede i oblikuje se iz viška tekuće riziko premije. Ona služi za vremensko izravnavanje rizika i može se dijeliti, u određenom vremenskom periodu, na premiju sigurnosti i matematičku premiju.

Iz dodatka za premiju sigurnosti oblikuje se pričuva sigurnosti, koja služi za nadoknadu eventualnih katastrofalnih šteta i kao svojevrsna sigurnost solventnosti osiguratelja prema osiguranicima. Iz dodatka za matematičku premiju oblikuje se matematička pričuva koja ima osobinu štednih uloga. Ta sredstva imaju posebnu namjenu i ne mogu biti predmet prinudnog izvršenja za obveze iz drugih vrsta osiguranja. Drugim riječima ta sredstva se mogu koristiti isključivo i samo u životnom osiguranju.

Izračunavanjem prosječne premije u životnom osiguranju bave se aktuari. Društvo za osiguranje, svojom premijom, mora biti konkurentno na tržištu, ali premije za istu vrstu životnog osiguranja izračunate na temelju stope smrtnosti mogu se razlikovati od jednog do drugog osiguratelja samo ako su korištene različite tablice smrtnosti, obračunska kamatna stopa ili se razlikuju u iznosu troškova poslovanja.

Razvijeno životno osiguranje znači stvaranje velikih financijskih kapaciteta iz kojih se sredstva mogu temporarno plasirati u dugoročne investicije, te u razvoj i potporu proizvodnje i sl. Time je životno osiguranje jako značajno i poticajno na razini cjelokupnog gospodarstva. Društva za osiguranje, posebno ona koja se bave životnim osiguranjem, su značajni sudionici na financijskom tržištu, zbog svojih financijskih kapaciteta i specifičnosti dužine vremena u tijeku kojeg raspolažu svojim financijskim kapacitetima.

Uz sve navedeno razvijenost životnog osiguranja je i pokazatelj razvijenosti društva u cjelini, jer razvijenost životnog osiguranja ovisi u prvom redu o visini BDP-a i razini životnog standarda, zatim o stupnju zaposlenosti kao i o nekim drugim ekonomsko-demografskim elementima.

2.3. Značaj životnog osiguranja

Životno osiguranje se odnosi na sva osiguranja žive osobe glede ugovorenih periodičnih isplata (rentno osiguranje) ili jednokratnih isplata (osiguranje kapitala, tj. života i/ili smrti) temeljem uplaćenih premija osiguravatelju.

Životno osiguranje se može najjednostavnije definirati kao ugovor kojim se osiguravatelja obvezuje da će sukladno prikupljenim premijama od osiguranika izvršiti ugovorenu isplatu ili isplate korisniku osiguranja.

Značaj životnog osiguranja je višestruk, sa sinergijskim efektima. Od esencijalne je važnosti za osiguranika i korisnika osiguranja, osobno i kolektivno (npr. obiteljski); društvo za osiguranje kao biznis sa stalnim uzlaznim trendom; poslovno okruženje u kojem djeluje društvo za osiguranje, posebno u financijskim i gospodarskim okolnostima (financijsko tržište, tržišta realnih dobara – kao institucionalni investitor); društvenu i državnu zajednicu – kao sveukupni stabilizirajući i razvojni potencijal.

Njegov se značaj ogleda i u psihološkom, sociološkom, filozofskom odražaju, sa metafizičkog stajališta i time izravno utječe na stupanj razvijanja svijesti (individualne, kolektivne, zakonodavne, poslovne, ...) o njegovom mjestu i funkciji.

Životna osiguranja, kao oblik osobne štednje, imaju sadržajnije sastavnice i izravnije psihološke efekte na pojedince, sa većim financijskim i materijalnim efektima od klasične štednje kod banaka. Da bi se, u konačnici, postigli takvi efekti treba blagovremeno i što cjelovitije identificirati sve relevantne utjecaje poslovnih rizika na oblikovanje i plasman matematičke pričuve životnih osiguranja, te njima sustavno upravljati kako bi se postigli najracionalniji rezultati – težiti ka njihovom optimiziranju.

3. MODELIRANJE TABLICA SMRTNOSTI

Potreba modeliranja tablica smrtnosti je u određivanju očekivanog trajanja života, odnosno vjerojatnosti smrti. Tablice smrtnosti su jedan sustav međusobno povezanih pokazatelja među kojima se izdvaja izglađena vjerojatnost smrti pomoću koje se izračunavaju ostale funkcije kao vjerojatnost doživljenja, kretanje broja živih i broja umrlih i druge. Prve tablice smrtnosti konstruirao je John Graunt u 17. stoljeću. Koriste se u različitim projekcijama stanovništva, demografskim mjerenjima i analizama, a neizostavan su skup podataka osiguravateljima života. Različitost njihove upotrebe zahtjeva i različite pristupe modeliranju i stvaranju tablica smrtnosti. S aspekta osiguranja naglasak je na što točnijoj vjerojatnosti smrti za svaku starosnu grupu. U tu svrhu bitan je opseg i karakteristike uzorka na kojem se temelji izrada samih tablica pa često osiguravatelji izrađuju svoje tablice smrtnosti.

3.1. Tablice smrtnosti

Mogući gubitci koji su posljedica prekida života pojedinca izravno utječu na kreiranje različitih modela osiguranja. Temelj aktuarskih izračuna i oblikovanja modela životnih osiguranja je očekivano preostalo vrijeme trajanja života, T(x).

Tablice smrtnosti određuju funkcije koje opisuju razdiobu očekivanih vrijednosti duljine životnog vijeka. Koriste se u različitim područjima znanosti pa su često različite korištene oznake vezane za tablice smrtnosti. U demografskim modelima demografi ih koriste za opisivanje rasta populacije, a u osiguranju aktuari ih koriste za kreiranje modela životnih osiguranja kako bi se predvidjeli i kontrolirali rizici vezani za vrijeme preostalo do smrti.

Ocijeniti tablice smrtnosti u smislu rizika koje one nose pri oblikovanju tarifa znači analizirati način na koji se one kreiraju. Stoga su bitni principi oblikovanja tablica smrtnosti, odnosno matematička utemeljenost funkcija koje opisuju smrtnost kroz vjerojatnosno-statistički pristup i deterministički pristup kreiranja tablica smrtnosti koji se koristi u praksi. Bitno je također odabrati odgovarajući analitički pristup modeliranja tablica smrtnosti i ne manje bitno izravnavanje (izglađivanje) tablica smrtnosti, odnosno modeliranje zajedničkog životnog vijeka radi uklanjanja pogreški koje se javljaju pri njihovom oblikovanju.

Tablice smrtnosti i kamatna stopa zajedno predstavljaju računski temelj za izračunavanje neto premija u osiguranju života. Premija mora biti dovoljna za pokriće obveza osiguravatelja prema osiguranicima što znači da uplate treba oblikovati u iznosima koji će osigurati isplatu ugovorene sume, bez obzira o kojem se obliku životnog osiguranja radi. Primjenom statističkih podataka i promatrajući dovoljno veliku grupu osoba iste starosti prati se stopa smrtnosti u toku godine. Do podataka o smrtnosti može se doći na dva načina i to: promatrajući grupu osoba iste starosti ili promatrajući više grupa osoba različite starosti. Temeljem opaženih podataka utvrđuje se vjerojatnost doživljenja određene starosti i pomoću tih vjerojatnosti konstruiraju se tablice smrtnosti. Tablice smrtnosti se šesto izrađuju za cijelo stanovništvo jedne zemlje, ali za potrebe životnih osiguranja mogu se izraditi promatranjem svih osiguranika. Prilikom izrade tablica smrtnosti uočavaju se prirodni zakoni smrtnosti prema kojima se može prognozirati tijek umiranja.

Različiti su principi kreiranja tablica smrtnosti pa time i rizici koje one nose prilikom nastajanja. Kreiranju tablica smrtnosti može se pristupiti na:

- Vjerojatnosno-statistički način u kojem se ističe matematička utemeljenost funkcija koje opisuju smrtnost,
- Deterministički način je način kreiranja tablica smrtnosti koji se koriste u praksi.
- Analitički način
- Izravnavanje tablica smrtnosti, odnosno uklanjanje pogrešaka koje se javljaju pri njihovom kreiranju.

Navedeni pristupi kreiranju tablica smrtnosti bit će objašnjeni kroz slijedeća poglavlja.

3.2. Uvjetna vjerojatnost doživljenja

Temelj vjerojatnosno-statističkog pristupa kreiranju tablica smrtnosti je funkcija doživljenja. Uzmimo primjer novorođene bebe i sa *X* označimo duljinu trajanja života novorođenčeta. Ova varijabla *X* je kontinuirana slučajna varijabla. Neka je *F(x)* funkcija razdiobe (distribucije) duljine života *X* ili funkcija razdiobe smrtnosti. Analitički,

$$F(x) = P(X \leq x),\ x \geq 0 \text{ i neka je} \tag{3.1}$$

$$s(x) = 1 - F(x) = 1 - P(X \leq x) = P(X \succ x),\ x \geq 0 \tag{3.2}$$

Funkciju $s(x)$, u statističkom smislu, predstavlja inverznu funkciju funkcije razdiobe smrtnosti. Ona definira vjerojatnost doživljenja godina *x*. Odavde proizlazi da slučajna varijabla *X* (očekivana duljina trajanja života) je u potpunosti određena funkcijom razdiobe duljine života *F(x)* ili funkcijom razdiobe doživljenja $s(x)$.

Funkcija doživljenja je temelj u aktuarstvu i demografiji, a u statistici ima ulogu funkcije razdiobe smrtnosti. Iz funkcije razdiobe lako se može doći do funkcije doživljenja i najvjerojatnije duljine života.

Vjerojatnost da novorođenče umre između godina x i z $(x < z)$ je

$$P(x \leq X < z) = F(z) - F(x) = s(x) - s(z) \tag{3.3}$$

Ovdje je bitno naglasiti uvjetovanost ove vjerojatnosti. Vjerojatnost da novorođenče umre između godina x i z uvjetovana je njegovim doživljenjem godina x.

$$P(x < X \leq z / X \succ x) = \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(z)}{s(x)} \tag{3.4}$$

3.3. Preostalo vrijeme života kao kontinuirana slučajna varijabla

Neka je slučajna varijabla preostalo vrijeme trajanja života osobe stare x godina definirana kao $T(x) = X - x$.

Neka ${}_t p_x$ vjerojatnost doživljenja godine $x + t$ za osobu star x godina i neka je nadalje

$${}_t q_x = P(T(x) \leq t), t \geq 0 \tag{3.5}$$

vjerojatnost da će osoba stara x godina umrijeti tijekom narednih t godina, odnosno razdioba funkcije $T(x)$ je

$${}_t p_x = 1 - {}_t q_x = P(T(x) \succ t), \;\; t \geq 0 . \tag{3.6}$$

vjerojatnost da će osoba stara x godina doživjeti godine $x+t$, odnosno funkcija doživljenja za osobu staru x godina.

Kao poseban slučaj treba izdvojiti novorođenče, odnosno

$$\begin{array}{l} T(0) = X - 0 = X \\ \Rightarrow {}_x p_0 = s(x) \end{array} \quad , \; x \geq 0 \tag{3.7}$$

Za $t = 1$ u formulama (3.5) i (3.6) dopušta se ne navođenje prefiksa. To znači slijedeće:

q_x = vjerojatnost smrti osobe stare *x* godina tijekom naredne godine,

p_x = vjerojatnost da će osoba stara *x* godina doživjeti $x+1$. godinu,

Uvedimo još jednu oznaku za vjerojatnost nastupa smrti osobe stare *x* godina i to:

${}_{t/u}q_x$ = vjerojatnost da će osoba stara *x* godina živjeti slijedećih *t* godina i umrijeti u slijedećih *u*, odnosno vjerojatnost nastupa smrti u vremenskom intervalu $(x+t, x+t+u)$

Analitički ,

$$ {}_{t/u}q_x = P(t < T(x) \leq t) = {}_{t+u}q_x - {}_t q_x = {}_t p_x - {}_{t+u}p_x \tag{3.8}$$

Prema formuli (3.4) slijedi:

$$ {}_t p_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_x p_0} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \tag{3.9}$$

$$ {}_t q_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \tag{3.10}$$

U formulama (3.9) i (3.10) prikazane su vjerojatnosti za osobu staru *x* godina, a time i za novorođenče uz uvjet doživljenja godine *x*. Opravdanje za navedeno je u činjenici postojanja informacija o osobi staroj *x* godina, a na temelju proživljenog vremena, koje nam omogućuje mnoštvo zaključaka vezanih za vjerojatnost doživljenja narednog perioda. Budući za novorođenče nemamo informacija o proživljenom vremenu koristimo formule za uvjetnu vjerojatnost. Pogledajmo sada vezu između uvjetne i bezuvjetne vjerojatnosti.

$$ {}_{t/u}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t} \tag{3.11}$$

Preostalo vrijeme života prikazano je kao kontinuirana slučajna varijabla ali nerijetko se javlja potreba za uvođenjem diskretne slučajne varijable koja predstavlja preostali broj godina života osobe stare *x* godina u oznaci *D(x)*. Varijable *T(x)* i *D(x)* su međusobno vezane pri čemu *D(x)* prima vrijednosti samo iz skupa pozitivnih cijelih brojeva.

Izvedimo jednakost za vjerojatnost slučajne varijable *D(x)*.

$$
\begin{aligned}
&P(D(x)=k)= \\
&=P(k \le T(x) < k+1) = P(k < T(x) \le k+1) = \\
&={}_k p_x - {}_{k+1}p_x = {}_k p_x \cdot q_{x+k} = \\
&={}_{k/}\, q_x
\end{aligned}
\qquad \text{za } k=0,1,2,3,... \qquad (3.12)
$$

Jednakost (3.12) vrijedi jer je *T(x)* kontinuirana slučajan varijabla i za nju vrijedi

$$P(T(x)=k) = P(T(x)=k+1) = 0. \qquad (3.13)$$

Jednakost (3.12) je ekvivalentna jednakosti (3.8) za $u=1$ i $k \in Z^+$. Evidentno je funkcija razdiobe diskretne slučajne varijable *D(x)* stepenasta pri čemu vrijedi

$$\sum_{r=0}^{k} {}_{r/}\, q_x = {}_{k+1}q_x \,. \qquad (3.14)$$

3.4. Intenzitet smrtnosti

Formula (3.4) predstavlja jednakost za uvjetnu vjerojatnost smrti novorođenčeta između godina *x* i *z*, uz uvjet da doživi godine *x*. Kada je $x \succ z$ vjerojatnost u formuli (3.4) i dalje zadržava svojstvo kontinuiranosti pa ju možemo promatrati kao funkciju od *x*. Tada opisuje razdiobu vjerojatnosti smrti u bližoj budućnosti za osobu koja doživi godine *x* (između vremena *0* i *z*). Analogno funkcija za trenutnu smrt dobije se pomoću učestalosti vjerojatnosti smrti za slučaj doživljenja godine *x*. Primjenom jednakosti (3.4) dobijemo

za $z = x + \Delta x$,

$$
\begin{aligned}
&P(x < X \le x + \Delta x / X \succ x) = \\
&= \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1-F(x)} = \frac{\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\cdot \Delta x}{1-F(x)} \cong \\
&\cong \frac{F'(x)\cdot \Delta x}{1-F(x)} = \frac{f(x)\cdot \Delta x}{1-F(x)}
\end{aligned}
\qquad (3.15)
$$

pri čemu je $f(x) = F'(x)$ gustoća razdiobe kontinuirane slučajne varijable, a funkcija $\dfrac{f(x)}{1-F(x)}$ interpretira se kao uvjetna gustoća vjerojatnosti. Za svaku godinu *x* ona daje vrijednost uvjetne gustoće razdiobe slučajne varijable *X* u slučaju doživljenja te godine. U aktuarstvu ovu funkciju zovemo intenzitetom smrtnosti, u vjerojatnosti predstavlja stopu rizika, a označavamo je sa μ_x.

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)} \tag{3.16}$$

Ova funkcija prima vrijednosti veće ili jednake nuli, $\mu_x \geq 0$, što proizlazi iz interpretacije $f(x)$ i $1-F(x)$. Uvedemo li zamjenu $x = y$ u jednakost (3.16) dobivamo

$$\mu_y = -\frac{s'(y)}{s(y)} \;\Rightarrow\; -\mu_y dy = d(\ln s(y)) \;\Rightarrow$$

$$-\int_x^{x+t} \mu_y dy = \ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right) = \ln {}_t p_x \;\Rightarrow \tag{3.17}$$

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y dy\right)$$

Često se u posljednju jednakost uvodi supstitucija $y = x + s$ pa možemo pisati

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \qquad \text{odnosno} \qquad {}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \tag{3.18}$$

Nerijetko je potrebno preživjele godine života povezati sa vrijednosti nula i vrijeme doživljenja sa *x* pa u tom slučaju dobivamo:

$${}_n p_x = s(x) = \exp\left(-\int_0^n \mu_s ds\right), \text{ zatim}$$

$$F(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) \tag{3.19}$$

$$F'(x) = f(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) \cdot \mu_x = {}_x p_0 \cdot \mu_x \tag{3.20}$$

Označimo sa

$\Phi(t)-$funkciju razdiobe neprekidne slučajne varijable preostalo vrijeme života x – godišnjaka, $T(x)=x-X$ i

$\varphi(t)-$gustoća razdiobe neprekidne slučajne varijable $T(x)$.

Uz ove oznake, a prema jednakosti (3.5) vrijedi slijedeće:

$$\Phi(t) = {}_t q_x \quad \text{i}$$

$$\varphi(x) = \frac{d}{dt}{}_t q_x = \frac{d}{dt}\left(1-\frac{s(x+t)}{s(x)}\right) = \frac{s(x+t)}{s(x)}\cdot\left(-\frac{s'(x+t)}{s(x)}\right) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}, \text{ za } t \geq 0 \qquad (3.21)$$

Umnožak ${}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$ predstavlja vjerojatnost smrti između godina x i $x+t$, za osobu staru x godina.

Odnosno vrijedi $\int_0^{\infty} {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = 1,\ t \geq 0$.

Jednakost za gustoću koju smo izveli u (3.21) možemo dobiti i pomoću ${}_t p_x$ kako slijedi:

$$\varphi(x) = \frac{d}{dt}(1-{}_t p_x) = -\frac{d}{dt}{}_t p_x = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \qquad (3.22)$$

Ovime smo uspostavili međusobne relacije između spomenutih aktuarskih funkcija.

Ako promatramo i analiziramo odabranu životnu skupinu tada ćemo za kreiranje tablica smrtnosti koristiti deterministički način koji se temelji na statističkim metodama.

Opravdanost determinističkog načina kreiranja tablica smrtnosti leži u njegovim rezultatima koji su podudarni sa rezultatima vjerojatnosno-matematičkog modela na odabranom uzorku.

Tablice smrtnosti koje se izravno koriste u praksi, odnosno koje se publiciraju za praktičnu upotrebu tablično prikazuju vrijednosti temeljnih i izvedenih funkcija pojedinačno za svaku godinu starosti. Podjela na temeljne i izvedene funkcije je samo metodološke prirode, a ne znači hijerarhijski niti kronološki redoslijed.[9]

- temeljne veličine:
    - $l_x -$ broj živih osoba životne dobi x godina,

[9] Šain, Ž.: Aktuarski medeli životnih osiguranja, I dio Osnove aktuarske matematike, Ekonomski fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 2009., str. 26.,27.

- d_x – broj umrlih od l_x osoba u tijeku (*x+1*). godine starosti;

- Izvedene (izračunate) veličine:
  - p_x – vjerojatnost doživljenja, tj. vjerojatnost da će osoba životne dobi *x* godina doživjeti *x+1* godinu,
  - q_x – vjerojatnost smrti, tj. vjerojatnost da osoba životne dobi *x* godina neće doživjeti *x+1* godinu, da će osoba umrijeti u *x*-toj godini,
  - L_x – srednji broj živih osoba u starosti od *x* do *x+1*,

Ranije smo u jednakosti (3.10) odredili uvjetnu vjerojatnost da će *x*-godišnjak umrijeti tijekom slijedećih *t* godina:

$$ {}_t q_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}, \tag{3.23} $$

ako pogledamo za jednu slijedeću godinu života, tj. za $t = 1$ imat ćemo jednakost

$$ q_x = 1 - \frac{s(x+1)}{s(x)}. \tag{3.24} $$

Analiziramo li skupinu od l_0 novorođenih, broj godina u trenutku smrti svakog od njih ima razdiobu određenu funkcijom razdiobe doživljenja $s(x)$. Neka je $L(x)$ broj osoba koje su doživjele godine *x*. Uvedemo li indeks $j = 1,2,3,...l_0$ za godine života novorođenih možemo pisati

$L(x) = \sum_{j=1}^{l_0} l_j$, gdje je l_j indikator za one koji su preživjeli godine *j*, tj.

$l_j = 1$ ako osoba *j* doživi godište *x*, a inače je $l_j = 0$.

Označimo sada sa l_x očekivanu vrijednost broja onih koji dožive godine *x* od l_0 promatranih novorođenčadi.

Sukladno tome možemo pisati:

$$ E(l_j) = s(x) \;\Rightarrow\; E(L(x)) = l_0 \cdot s(x) $$

$$ E(L(x)) = l_x, $$

odakle slijedi

$$l_x = l_0 \cdot s(x) \quad \Leftrightarrow \quad s(x) = \frac{l_x}{l_0} \tag{3.25}$$

Uz pretpostavku da su indikatori l_j međusobno nezavisni zaključujemo da $L(x)$ ima binomnu razdiobu uz parametre $n = l_0$ i $p = s(x)$.

Slično uvodimo oznaku ${}_nD_x$ za broj umrlih čija je starost u tom trenutku bila između godine x i $x+n$ od početnog broja l_0 promatranih osoba. Sa ${}_nd_x$ označimo očekivanu vrijednost slučajne varijable ${}_nD_x$. Vjerojatnost smrti novorođenčeta je $s(x) - s(x+n)$ pa pomoću l_x možemo izraziti očekivanu vrijednost slučajne varijable ${}_nD_x$ kako slijedi:

$$\begin{aligned} {}_nd_x &= E({}_nD_x) = l_0(s(x) - s(x+n)) = l_x - l_{x+n} \\ {}_nd_x &= l_x - l_{x+n} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Kao i što je ranije korišteno za $n = 1$ u oznakama ${}_nd_x$ i ${}_nD_x$ izostavljamo n i pišemo d_x odnosno D_x. Napišimo osnovne aktuarske funkcije pomoću ovih veličina. Iz prethodnih jednakosti slijedi:

$$-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -\frac{1}{s(x)} \cdot \frac{ds(x)}{dx} = \mu_x \tag{3.27}$$

i $$-dl_x = l_x \cdot \mu_x \cdot d_x. \tag{3.28}$$

U jednakosti (3.28) umnožak $l_x \cdot \mu_x = l_0 \cdot {}_xp_0 \cdot \mu_x = l_0 \cdot f(x)$ možemo objasniti kao očekivana gustoća smrtnosti u godištu iz intervala $(x, x+n)$. Stoga možemo pisati:

$$l_x = l_0 \cdot \exp\left(-\int_0^x \mu_y dy\right) \tag{3.29}$$

$$l_{x+n} = l_0 \cdot \exp\left(-\int_x^{x+n} \mu_y dy\right) \tag{3.30}$$

$$l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} \mu_y dy = {}_nd_x \tag{3.31}$$

Istraživanja su pokazala da zanemarivo mali postotak ljudske populacije živi preko 110 godina pa se u akturastvu uvode granične godine, označavaju se sa ω i vrijedi:

$s(x) \succ 0$ za $x < \omega$, a $s(x) = 0$ za $x \geq \omega$.

3.5. Očekivani preostali dio životnog vijeka

Vjerojatnost doživljenja godine *x+t* za osobu staru *x* godina je konstanta ili opada sa porastom broja *t* i ta funkcija ima oblik

$$ {}_t p_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y dy \right), \tag{3.32}$$

gdje je $\mu_y \geq 0$ za svaki $y \geq 0$. Ako je $t = 0$ tada ${}_t p_x \to 1$ i kada $t \to \infty$ tada ${}_t p_x \to 0$ jer tada $\int_x^{x+\infty} \mu_y dy \to \infty$.

Često se uz zamjenu varijabli vjerojatnost doživljenja piše u obliku

$$ {}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu(x+s) ds \right) \tag{3.33}$$

Ako se ova jednakost derivira dobije se obična diferencijalna jednadžba:

$$\frac{d}{dt}({}_t p_x) = -({}_t p_x)\mu(x+t). \tag{3.34}$$

Dakle derivacija kumulativne funkcije distribucije $F(x)$ ili $1 - {}_t p_x$ je funkcija gustoće vjerojatnosti $f(x)$ što je ekvivalentno zapisu:

$$f(x) = \left(1 - F(x)\right) \cdot \mu(x+t). \tag{3.35}$$

Na temelju prethodne jednadžbe i običnih diferencijalnih jednadžbe za funkciju $F(x)$ možemo pisati slijedeći odnos ili jednakost:

$$\mu(x+t) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}. \tag{3.36}$$

Odavde se može napisati još jedan oblik jednadžbe ili još jedna jednakost

$$F(x) = 1 - \frac{f(x)}{\mu(x+t)} \tag{3.37}$$

Što podrazumijeva i još jednu jednakost

$$f(x) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) \tag{3.38}$$

Sa prethodnim jednakostima prikazan je odnos između kumulativne funkcije distribucije $F(x)$, funkcije gustoće vjerojatnosti $f(x)$ i intenziteta smrtnosti $\mu(x)$.

Uz pretpostavku normalne razdiobe za funkciju smrtnosti tada slučajna varijabla preostalo vrijeme života $T(x)$ se ponaša prema zakonu

$$N(m,\sigma,t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m}{\sigma} \right)^2 \right) dz \,. \tag{3.39}$$

Koristeći normalnu razdiobu za procjenu preostalog životnog vijeka izračunate su vjerojatnosti smrtnosti.

Tablica 1. Vjerojatnosti smrtnosti kada je broja preostalih godina života procijenjen pomoću normalne razdiobe

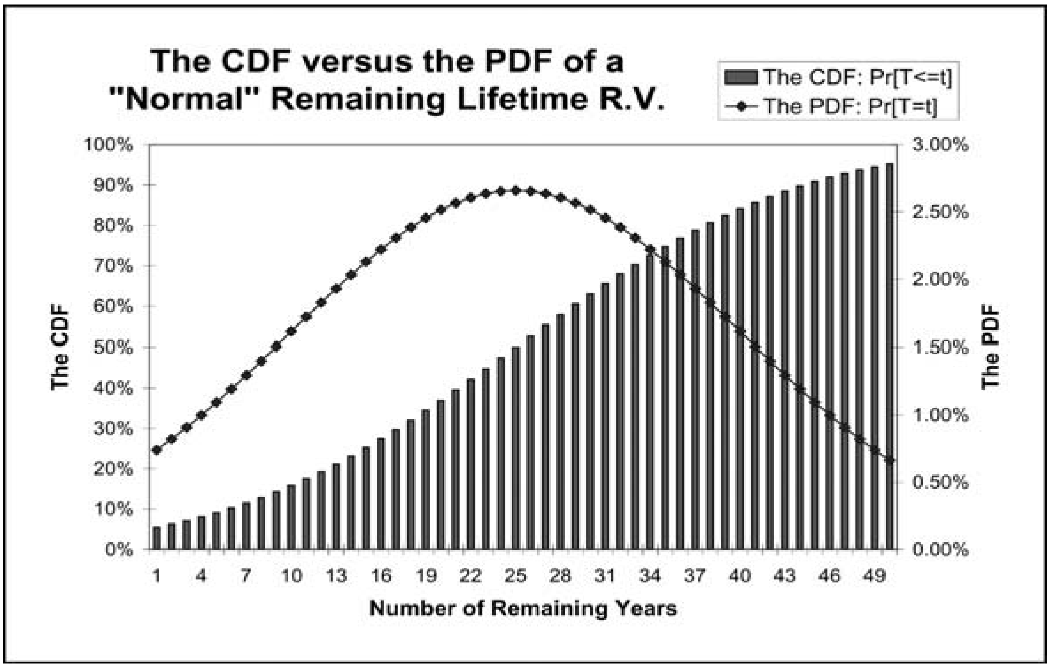
Godina	$F(t)$	$f(t)$	$\frac{f(t)}{1-F(T)}$
1	5.48%	0.74%	0.78%
5	9.12%	1.09%	1.20%
10	15.87%	1.61%	1.92%
15	25.25%	2.13%	2.85%
20	36.94%	2.52%	3.99%
25	50.00%	2.66%	5.32%
30	63.06%	2.52%	6.81%
35	74.75%	2.13%	8.43%
40	84.13%	1.61%	10.17%
45	90.88%	1.09%	11.99%
50	95.22%	0.66%	13.88%

Izvor: M.,A., Milevsky: The Calculus of Retirement Income, Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Cambridge University Press, New York, 2006

Vrijednosti u tablici su računate za očekivanu vrijednost $E(T) = 25$ godina i standardnu devijaciju $\sigma = 15$ godina.
Vjerojatnosti smrtnosti u tablici imaju slijedeće značenje: za pojedine osobe danas žive vjerojatnost umiranja u roku od 15 godina iznosi 25.25%, dok je vjerojatnost umiranja tijekom 15 godina jednaka 2.13%

Sa slike je jasno vidljivo odstupanje grafa normalne razdiobe od očekivanih vrijednosti preostalih godina života.

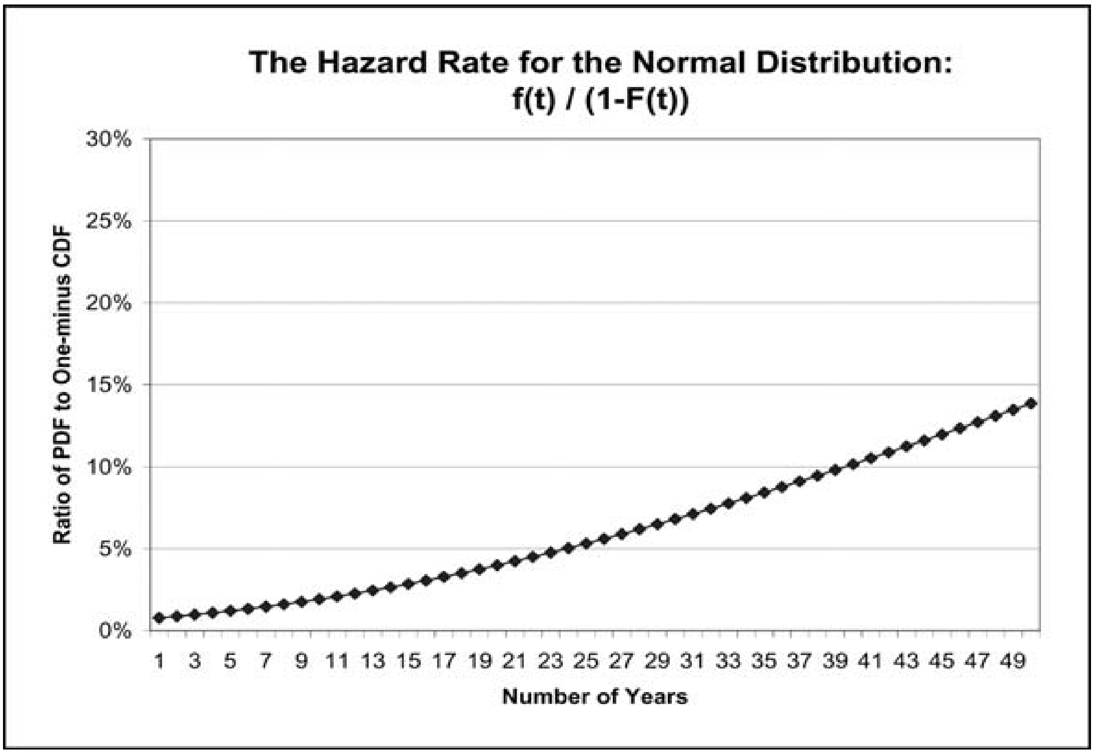
Slika 3. Broj preostalih godina života uz pretpostavku normalne razdiobe za slučajnu varijablu $T(x)$



Izvor: M.,A., Milevsky: The Calculus of Retirement Income, Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Cambridge University Press, New York, 2006

Normalna razdioba je razdioba koja postiže maksimum za očekivanu vrijednost standardizirane varijable z. To znači da za vrijednosti veće od očekivane vrijednosti funkcija razdiobe je monotono padajuća funkcija što bi značilo pretpostavku da je intenzitet smrtnosti monotono padajuća funkcija kada slučajna varijabla $T(x)$ raste. To je u suprotnosti sa prirodnim zakonima smrtnosti.

Slika 4. Stopa rizika za normalnu razdiobu varijable $T(x)$



Izvor: M.,A., Milevsky: The Calculus of Retirement Income, Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Cambridge University Press, New York, 2006

Na slici 4 koja prikazuje rizik za normalnu razdiobu varijable $T(x)$ prikazana je funkcija rizika, a ona je rastuća kako se vidi sa slike. To znači stalni rastući rizik kako slučajna varijabla $T(x)$ raste.

Dakle modeliranje slučajne varijable $T(x)$ pomoću normalne razdiobe ne stvara realnu aproksimaciju preostalog vremena života.

3.6. Zakoni smrtnosti

S razvojem brzih računala prednosti analitičkih tablica smrtnosti su smanjene u posljednjih nekoliko godina. No, neke od njih su i dalje zanimljive primjerice Makeham tablice smrtnosti. Analitičke tablice smrtnosti su definirane za sve uzraste. U praksi se koriste samo za određeni dobni interval.

Različite pretpostavke s kojima se pristupa aproksimaciji aktuarskih funkcija rezultiraju različitim modelima zakona smrtnosti. Ti različiti zakoni vezani su, gotovo uvijek, za različite znanstvenike i po njima nose imena.

De Moivre-ov zakon

De Moivre je pošao od pretpostavke da je broj živih osoba starosti *x* funkcija konstanta čija vrijednost stepenasto pada sa povećanjem starosti sve do granične starosti kada prima vrijednost nula.

$$l_x = r - x \text{ za } 0 \le x \le r \text{ , a } l_x = 0 \text{ za } r \le x \tag{3.40}$$

Za De Moivre-a vrijeme života je funkcija konstanta u nekom intervalu godina $(0, r)$ pri čemu je r granična starost. Prema De Moivre-ovom zakonu funkcija $f(x)$ je funkcija konstanta, funkcija doživljenja kao i intenzitet smrtnosti su također funkcije konstante. Empirijski dobiveni rezultati pokazuju kako se spomenute funkcije jako razlikuju od funkcije konstante. Ovaj model je zastario i ne može se koristiti u aktuarstvu, ali je to bio jedan od prvih pokušaja opisivanja aktuarskih funkcija matematičkim zakonitostima.

Gompertz-ov zakon

Gompertz je pretpostavio da intenzitet smrtnosti eksponencijalno raste s dobi.

$$l_x = \alpha \cdot g^{c^x} \text{, gdje je } \alpha \succ 0 \text{ , } 0 < g \prec 1 \text{ i } c \succ 1.$$

Eksponent c^x mora biti procijenjen i ne može u funkciji biti samo g^c.

Gompertzov zakon smrtnosti svodi se na eksponencijalnu funkciju oblika:

$$\mu_x = \beta \cdot e^{bx} \text{, pri čemu je } 0 < \beta \prec b. \tag{3.41}$$

Funkcija doživljenja u ovom zakonu ima oblik eksponencijalne funkcije kako slijedi:

$$s(x) = \exp\left((-\frac{\beta(e^{bx} - 1}{b} \right) \text{, a funkcija razdiobe smrtnosti je oblika} \tag{3.42}$$

$$f(x) = \beta \cdot \exp\left(bx - \frac{\beta(e^{bx} - 1}{b} \right). \tag{3.43}$$

Makaham-ov zakon

Makaham je poopćio Gompertzov zakon i pretpostavlja da je

$$l_x = \alpha \cdot s^x \cdot g^{c^x}$$, gdje je $\alpha \succ 0$, $0 < s \prec 1$, $0 < g \prec 1$ i $c \succ 1$.

Eksponent c^x mora biti procijenjen i ne može u funkciji biti samo g^c.

Intenzitet smrtnosti je opisan eksponencijalnom funkcijom oblika:

$\mu_x = \alpha + \beta \cdot e^{bx}$ u kojoj parametar α predstavlja rizik smrti uslijed nesretnog slučaja i ne ovisi o starosti, a $\beta \cdot e^{bx}$ je funkcijski dio koji povezuje intenzitet smrtnosti i starost promatrane osobe.

Funkcija doživljenja i funkcija razdiobe smrtnosti u ovom modelu su oblika:

$$s(x) = e^{(-\alpha x - \frac{\beta(e^{bx}-1)}{b})} \text{ i} \tag{3.44}$$

$$f(x) = (\alpha + \beta e^{bx}) \cdot e^{\left(-\alpha x - \frac{\beta(e^{bx}-1)}{b}\right)}. \tag{3.45}$$

Sang-ov zakon

Sang pretpostavlja da je broj živih osoba starosti *x* određen pomoću funkcije oblika:

$$l_x = \alpha + \beta \cdot c^x \text{, gdje je } \alpha \succ 0 \text{ , } \beta \succ 0 \text{, } 0 < c \prec 1 \text{ .} \tag{3.46}$$

Weibull-ov zakon

Weibull polazi od eksponencijalne funkcije

$$l_x = \alpha \cdot g^{x^c}$$, gdje je $\alpha \succ 0$, $0 < g \prec 1$ i $c \succ 0$.

Sada eksponent x^c mora biti procijenjen i ne može u funkciji biti samo g^x.

Funkcija zakona smrtnosti u ovom zakonu je oblika:

$$\mu_x = \beta \cdot x^b \tag{3.47}$$

Sukladno ovoj funkciji razdioba smrtnosti i funkcija doživljenja su dane sa:

$$s(x) = e^{\left(\frac{-\beta x^{b+1}}{b+1}\right)} \tag{3.48}$$

a razdioba smrtnosti je zadana funkcijom

$$f(x) = \beta x^b \cdot e^{\left(\frac{-\beta x^{b+1}}{b+1}\right)} \tag{3.49}$$

Analiziramo li napisane funkcije lako je uočiti analogiju između Weibullove funkcije s jedne strane i Gompertzove i Makehamove funkcije s druge strane.

Pretpostavka kako se smrtnost može dobro opisati eksponencijalnom funkcijom na prvi pogled je bila dobra. Međutim, pokazalo se da je u prvom dijelu životne dobi intenzitet smrtnosti monotono padajuća funkcija. Oko sredine intervala starosti intenzitet smrtnosti je približno konstantna funkcija, a u posljednjem dijelu intervala života intenzitet smrtnosti je rastuća eksponencijalna funkcija.

3.7. Modeliranje (izravnavanje) zajedničkog životnog vijeka

Vjerojatnosti smrti određene pomoću prethodno obrađenih metoda su tzv. sirove vjerojatnosti. U tablicama smrtnosti su tablično složene izračunate vjerojatnosti među kojima može biti skokovitih promjena što se definira kao nepravilnosti jer su pretpostavke pravilnog rasta vjerojatnosti smrti u vremenu. Nepravilnosti mogu nastati kao posljedica više faktora i to: nereprezentativnost uzorka (veličina uzorka) koji se promatra, povećani intenzitet smrtnosti kod određene starosne populacije (pojava nekih bolesti koje pogađaju određenu starosnu dob u određenom vremenskom periodu), manjkavosti vezane za odabir i određivanje uzorka, metoda i slično.

Cilj modeliranja (izglađivanja) životnog vijeka odnosno izglađivanja tablica smrtnosti je transformacija sirovih vjerojatnosti smrti kako bi se otklonile posljedice slučajnih grešaka, otklanjanje odstupanja i nepravilnosti koje se javljaju pri izračunu vjerojatnosti. Razlikujemo dvije metode izglađivanja sirovih vjerojatnosti. Jedan način je aproksimirati izravnate vrijednosti tako da budu što prilagođenije sirovim vjerojatnostima.

Drugi način izglađivanja je analitički pomoću analitičkih zakona smrtnosti. Problem izglađivanja tablica smrtnosti je ekvivalentan problemu interpolacije u matematici.

Najjednostavniji način izglađivanja je pomoću jednostavne aritmetičke sredine susjednih sirovih vjerojatnosti smrti:

$$q_{x,3} = \frac{q_{x-1} + q_x + q_{x+1}}{3}$$

$$q_{x,2n+1} = \frac{q_{x-n} + q_{x-n+1} + ...q_x + q_{x+1} + ...q_{x+n}}{n}$$

Nedostatak ovog načina izglađivanja je što se originalni vremenski niz skraćuje na početku i na kraju za po *n* članova. Međutim za osiguranje života je najzanimljivija starosna dob od 15 do 75 godina ovaj način se može koristiti za jednostavno aproksimativno izglađivanje.

Ovaj način izglađivanja se može poboljšati ponderiranjem sirovih vjerojatnosti smrti pridruživanjem najvećeg pondera onoj sirovoj vjerojatnosti koju želimo izgladiti, susjednoj vjerojatnosti manji ponder itd. Nakon ponderiranja sirovih vjerojatnosti ponovo računamo aritmetičku sredinu, ali sada za grupirane (ponderirane) vrijednosti.

$$q_{x,5} = \frac{q_{x-2} + 2q_{x-1} + 3q_x + 2q_{x+1} + q_{x+2}}{9}, \text{ jer je } 2 \cdot (1+2) + 3 = 9.$$

Ako je zadan vremenski niz: $x_1, x_{2,} x_3, ..., x_n$ izglađene vrijednosti niza ćemo računati pomoću formule

$$\sum_{i=-k}^{l} \alpha_i \cdot x_{j+i}, \quad j = k+1, k+2, ...n-l \qquad \text{gdje je} \qquad \sum_{i=-k}^{l} \alpha_i = 1.$$

Aritmetička sredina ponderiarnih vrijednosti približno je jednaka jednostavnoj srednjoj vrijednosti, no mjere rasipanja su manje u slučaju ponderiranih vrijednosti. Ponderi α_i određuju se na različite načine. Najčešće se koristi model lokalnog trenda, odnosno pomičnog regresijskog modela.

Nad pomičnim prosjecima izvode se različite operacije: računaju se višestruki prosjeci, pomični se prosjeci zbrajaju i računaju njihovi prosjeci itd.

Postoje i pomični prosjeci specifičnih svojstava. Takvi su Hendersenovi i Spencerovi pomični prosjeci. Riječ je o pomičnim prosjecima sa simetričnim ponderima kojima se aproksimira polinom trenda drugog i trećeg stupnja.[10]

Hendersenovi peteročlani pomični prosjeci temelje se na ovim ponderima:

$$\alpha_i : \left\{ \frac{1}{286} [-21, 84, 160, 84, -21] \right\}.$$

Petnaesteročlani Hendersenovi pomični prosjeci računaju se upotrebom ovih pondera (središnji i s lijeve strane od središnjeg):

[10] Šošić, I.: Primijenjena statistika, Školska knjiga, Zagreb, 2004., str. 629.

$$\alpha_i : \left\{ \frac{1}{193154} [-2652,-3732,-2730,3641,16016,18182,37422,40860,...] \right\}.$$

Spencerovi pomični prosjeci po 15 članova polaze od ovih pondera (središnji i s lijeve strane od središnjeg):

$$\alpha_i : \left\{ \frac{1}{320} [-3,-6,-5,3,21,46,67,74,...] \right\},$$

a Spencerovi pomični prosjeci od 21 člana:

$$\alpha_i : \left\{ \frac{1}{350} [-1,-3,-5,-5,-2,6,18,33,47,57,60,...] \right\}.$$

Navest ćemo još dva načina (modela) izglađivanja sirovih vjerojatnosti. Jedan je Woolhouse-ov model koji za svake tri vjerojatnosti oblikuje kvadratne funkcije, koje formiraju sustav tri jednadžbe sa tri nepoznanice. Rješenje sustava su koeficijenti kvadratne funkcije za svaki odabrani godišnji interval, koje uvrštavanjem u jednadžbe daju vrijednosti s kojima se računa jednostavna aritmetička sredina i ona predstavlja izglađenu vjerojatnost za promatrani vremenski niz.

Često u praksi korišten je Karupov model koji postavlja jednadžbe trećeg reda kako bi se postigao još veći stupanj izglađivanja.

Opći oblik **Karupove formule** glasi:

$$q_{x,n} = \frac{1}{2n^4} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(2n^3 - 5ni^2 + 3i^2\right) z_i - i(n-1)^2 z_{n+1} \right] \tag{3.50}$$

gdje je $z_0 = q'_x$ i $z_i = q'_{x-i} + q'_{x+i}$.

Za različite vrijednosti n dobivaju se različite formule koje svoje mjesto nalaze u praksi.

Iz navedenih formula vidljivo je da se Karupove formule ne mogu primijeniti za starosti $x = 0,1,2,3$, a za $x = 4,5,...,12$ ne može se primijeniti svih 7 formula. Također, te formule ne daju dobre rezultate za starost od 90 do 99 godina, zbog slučajnih grešaka u podacima o mortalitetu tih godišta što narušava pravilan rast vjerojatnosti smrti s povećanjem starosti, a to je posljedica i malog broja slučajeva iz kojih se izračunavaju sirove vjerojatnosti smrti. Pokazalo se da su vjerojatnosti smrti izračunane Karupovim formulama neregularno male za spomenute dobne skupine. Zato se morao primijeniti drugi postupak izglađivanja.[11]

Osnovna karakteristika analitičkih modela je opisivanje kretanja smrtnosti pomoću matematičkih funkcija. Neka je funkcija izglađivanja višeparametarska funkcija $f(x, a_0, a_1, ...a_n)$ koja dobiva svoj potpuni analitički zapis određivanjem nepoznatih parametara $a_0, a_1, a_2, ...a_n$.

Najčešće korištena metoda za ocjenjivanje nepoznatih parametara je metoda najmanjih kvadrata. Neka su zadane sirove vjerojatnosti smrti q_x i neka smo pomoću funkcije izglađivanja dobili izglađenu (izravnatu) vjerojatnost

$$q_x^{'} = f(x, a_0, a_1, ...a_n).$$

Greška koja nastaje pri izglađivanju je $q_x - q_x^{'}$, a suma kvadrata greški je:

$$F(x, a_0, ...a_n) = \sum_{x_1}^{x_2} \left(f(x, a_0, ...a_n) - q_x \right)^2 \tag{3.51}$$

Greška F se nastoji minimizirati i pri minimalnoj greški određuju se nepoznati parametri $a_0, a_1, a_2, ...a_n$.

Uz pretpostavku neprekidnosti i derivabilnosti funkcije u promatranom intervalu uvjet za minimum možemo pisati:

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{da_j} = \sum \left(\frac{d}{da_j} f(x, a_0, ...a_n) - q_x \right)^2 .$$

Najprije je iskušan postupak pomoću **Gompertz-Makehamove formule**, koji je u ranijim detaljnim tablicama najčešće korišten.

Gompertz je postavio pretpostavku da se smrtnost povećava eksponencijalno u vremenu

$$\mu_x = \beta \cdot c^x , \tag{3.52}$$

[11] Tablice mortaliteta Republike Hratske 2000. – 2002., Državni zavod za statistiku Republike Hrvatske CRO STAT, Zagreb, 2007.

gdje je μ_x - intenzitet smrtnosti, β - koeficijent smrtnosti karakterističan za osobu i jednak je izglađenoj vjerojatnosti Karupovom formulomi, c^x - eksponencijalna funkcija vjerojatnosti smrtnosti.

Analizirajmo μ_x u beskonačno malom vremenskom intervalu, odnosno odredimo graničnu vrijednost intenziteta smrtnosti:

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{l_x \Delta x},$$ odakle slijedi

$$\mu_x = \frac{1}{l_x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{1}{l_x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{l_{x+\Delta x}}{\Delta x},$$ dalje možemo pisati

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -\frac{d \ln l_x}{dx} = -\frac{l_x'}{l_x}$$

Integriramo li ovu diferencijalnu jednadžbu imamo

$$\int \mu_x dx = -\int d(\ln x)dx = \ln l_x \ln k_1 = \ln(l_x k_1) \tag{3.53}$$

Iskoristimo li definiciju logaritamske funkcije možemo pisati

$$l_x k_1 = e^{-\int \mu_x dx} \Rightarrow l_x = ke^{-\int \mu_x dx} = ke^{-\beta \int c^x dx}$$, jer je $\mu_x = \beta \cdot c^x$.

Konačno nakon posljednje integracije imamo

$$l_x = ke^{-C_1 \cdot c^x} \text{ pri čemu je } C_1 = \frac{c^x}{\ln c}. \tag{3.54}$$

Primjenom Gompertz-Makehamove formule $\mu_x = \alpha + \beta \cdot c^x$, u kojoj parametar α predstavlja rizik smrti uslijed nesretnog slučaja i ne ovisi o starosti, a $\beta \cdot c^x$ je funkcijski dio koji povezuje intenzitet smrtnosti i starost promatrane osobe dobivamo jednakost za broj osoba starih l_x godina:

$$l_x = ke^{-\int (\alpha + \beta c^x)dx}$$

Dobili smo formulu koja je u mnogim analitičkim aktuarskim analizama i ona je temelj

King-Hardy modela.

Vjerojatnost doživljenja *x+1*. godine je $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$.

Primjenom prethodno izvedenih formula dobije se:

$$\log(p_x) = a + bc^x .$$

Konstante *a, b, c* mogu se odrediti pomoću parcijalnih suma i to tako da podijelimo promatrani interval na tri dijela: od starosti $i = 0$ do $i = n - 1$, potom $i = n$ do $i = 2n - 1$ i treći dio od $i = 2n$ do $i = 3n - 1$.

Slijedi formiranje parcijalnih suma:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \log p_{x+i} &= na + b\sum_{i=0}^{n-1} c^{x+i} = na + bc^x \frac{c^n - 1}{c - 1} \\
\sum_{i=n}^{2n-1} \log p_{x+i} &= na + b\sum_{i=n}^{2n-1} c^{x+i} = na + bc^{x+n} \frac{c^n - 1}{c - 1} \\
\sum_{i=2n}^{3n-1} \log p_{x+i} &= na + b\sum_{i=2n}^{3n-1} c^{x+i} = na + bc^{x+2n} \frac{c^n - 1}{c - 1}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Napisane jednadžbe čine sustav tri jednadžbe sa tri nepoznanice. Rješenje ovog sustava su koeficijenti *a, b, c*. Ovaj model izglađivanja koristi se najčešće za starosnu skupinu iznad 80 godina.

Ako se pri izglađivanju koriste simetrični ponderi dolazi do skraćivanja vremenskog niza što može rezultirati pogreškama pri prognoziranju. Kako bi se izbjeglo skraćivanje niza često se koriste nesimetrični ponderi koji opadaju prema geometrijskoj progresiji. Stoga se često koriste metode jednostavnog eksponencijalnog izglađivanja kao što su: Browne i Hold-Winters model. Kada i koji model odabrati ovisi o karakteristikama vremenskog niza koji se izglađuje. Ako vremenski niz $x_1, x_2, ... x_3$ ima svojstvo slučajnih oscilacija oko prosječne razine može se primijeniti jednostavno eksponencijalno izglađivanje. Neka su originalne vrijednosti vremenskog niza prikazane na slijedeći način:

$$x_t = \mu + \varepsilon, \quad E(\varepsilon_t) = 0, \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma^2 .$$

Za ocjenu prosječne razine mogu se koristiti opadajući ponderi. Oni čine eksponencijalno padajući niz i to tako da kronološki zadnja vrijednost u nizu ima najveći ponder u formiranju prognostičke vrijednosti. Što je vrijednost niza udaljenija od vremena za koje se prognozira, to je njen utjecaj na prognostičku vrijednost manji.

$$\mu_t = \alpha x_t + \alpha(1-\alpha)x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-2} + \ldots \quad \text{ili}$$

$$\mu_t = \alpha \sum_j (1-\alpha)^j x_{t-j} \tag{3.56}$$

gdje je α - konstanta izglađivanja, $0 < \alpha < 1$

dalje je

$$\mu_t = \alpha(1 + (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)^2 \beta^2 + \ldots)x_t \tag{3.57}$$

gdje je β operator kašnjenja koji se definira kao $\beta x_t = x_{t-1}$ ili općenitije kao $\beta^k x_t = x_{t-k}$, to znači da istaknuti operator pomjera podatak vremenskog niza za jedno mjesto unazad.

U prethodnoj jednakosti izraz u zagradi predstavlja beskonačan geometrijski red, a njegova suma je:

$$1 + (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)^2 \beta^2 + \ldots = \frac{1}{1 + (1-\alpha)\beta}, \tag{3.58}$$

Uz ovu sumu možemo pisati:

$$\alpha x_t = \left(1 + (1-\alpha)\beta\right)\mu_t \quad \Rightarrow \quad \alpha x_t = \mu_t + (1-\alpha)\beta\mu_t. \tag{3.59}$$

Primjenom operatora kašnjenja možemo pisati slijedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} \alpha x_t &= \mu_t + (1-\alpha)\mu_{t-1} \\ \mu_n &= \alpha x_n - (1-\alpha)\mu_{n-1} \end{aligned} \tag{3.60}$$

Supstitucijom $\mu_{n-1} = \mu_n$ dobiva se

$$\begin{aligned} \mu_n &= \alpha x_n - \alpha(1-\alpha)x_{n-1} + (1-\alpha)^2 \mu_{n-2} \\ \mu_n &= \alpha x_{n-1} - (1-\alpha)\mu_{n-2} \end{aligned} \tag{3.61}$$

Nastavimo li postupak μ_n će biti ocijenjen sa:

$$\mu_n = \alpha \sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^j x_{n-j} + (1-\alpha)^n \mu_0 \tag{3.62}$$

Ocjena parametra može biti pristrana ili nepristrana. U slijedećim jednakostima bit će pokazana pristranost ocjenjenog parametra μ_n.

Prema definiciji očekivanja slučajne varijable X vrijedi:

$$E(\mu_n) = E\left(\alpha\sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j x_{n-j} + (1-\alpha)^n \mu_0\right)$$

$$E(\mu_n) = \alpha\sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j E(x_{n-j}) + E(1-\alpha)^n \mu_0$$

$$E(\mu_n) = \alpha\mu\sum(1-\alpha)^j + (1-\alpha)\mu_0 \,. \qquad (3.63)$$

Promatrajući asimptotski, odnosno kada $n \to \infty$ vrijedi:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1-\alpha)^j = \alpha^{-1},\ (1-\alpha)^n \to 0 \ \Rightarrow \ E(\mu_n) = \alpha\mu\alpha^{-1} = \mu \,. \qquad (3.64)$$

Uspoređujući vremenski niz vjerojatnosti smrti sa prethodno opisanim lako je zaključiti kako ovaj niz ne odgovara prethodnom modelu. U vremenskom nizu vjerojatnosti smrti radi se o nizu sa trendom pa se u tom slučaju primjenjuju Brown ili Holt-Winters model izglađivanja. Tu se radi o izglađivanju pomoću eksponencijalne funkcije oblika $\mu_x = \alpha + \beta \cdot c^x$.

Ako vremenski niz ima trend komponentu tada opći model ima oblik:

$$x_t = \mu + T_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_n = a\sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j x_{n-j} + (1-\alpha)^n \mu_0 \qquad (3.65)$$

Provede li se supstitucija dobiva se:

$$\mu_n = \alpha\sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j (\mu + T(n-1)) + (1-\alpha)^n \mu_0 \qquad (3.66)$$

Očekivanje je:

$$E(\mu_n) = E\left[\alpha\sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j(\mu + T(n-j)) + (1-\alpha)^n \mu_0\right]$$

$$E(\mu_n) = \alpha\sum_{j=0}^{n-1}(1-\alpha)^j E(\mu + T(n-j)) + E(1-\alpha)^n \mu_0$$

Ako broj *n* postane beskonačno velik, odnosno kada $n \to \infty$ očekivanje će biti

$$E(\mu_n) = \alpha\sum_{j=0}^{\infty}(1-\alpha)^j E(\mu + T(n-j)) + E(1-\alpha)^n \mu_0$$

$$E(\mu_n) = \alpha\sum(1-\alpha)^j E(\mu + T_n - T_j)$$

$$E(\mu_n) = \alpha E(\mu + T_n)\sum_{j=0}^{\infty}(1-\alpha)^j - \alpha\sum E(Tj(1-\alpha)^j)$$

$$E(\mu_n) = \alpha E(\mu + T_n)\alpha^{-1} - \alpha T\sum_{j=0}^{\infty} j(1-\alpha)^j$$

$$E(\mu_n) = E(\mu + T_n) - \alpha\frac{1-\alpha}{\alpha^2}$$

$$E(\mu_n) = E(X_n) - \frac{1-\alpha}{\alpha} \qquad (3.67)$$

Slijedi zaključak: ocjena je pristrana.

Za izbjegavanje pristranosti primjenjuje se dvostruko, trostruko, itd. eksponencijalno izglađivanje ili Browne-ovo izglađivanje, Holt-Wintersov model i dr. Suština dvostrukog izglađivanja je u ponovljenoj primjeni jednostavnog eksponencijalnog izglađivanja na već izglađeni (izravnati) vremenski niz.

Za provedbu postupka izglađivanja, potrebno je utvrditi inicijalne vrijednosti za razinu pojave i efekta trenda i konstante izglađivanja. To se provodi na različite načine.

Temeljem izloženog jasno je vidljiva ovisnost između modela kreiranja tablica smrtnosti, izglađivanja sirovih vjerojatnosti i vjerojatnosti u tablicama spremnim za korištenje. Iz tog razloga izglađivanje tablica smrtnosti je izravno način upravljanja rizikom kreiranja tablica smrtnosti.

4. MODELI ŽIVOTNIH OSIGURANJA

Modeliranje životnih osiguranja sve više se prilagođava potrebama i zahtjevima korisnika ili potencijalnih korisnika osiguranja. Temeljni modeli životnih osiguranja su: modeli osiguranja renti i modeli osiguranja kapitala. Modeli osiguranja renti su životna osiguranja koja svojim oblikom isplata su slična isplatama mirovina, odnosno radi se o periodičnim isplatama. Drugi oblik model osiguranja kapitala je osiguranje koje se u pravilu isplaćuje jednokratno. Iz ovih dvaju temeljnih modela razvijaju se različiti modeli i submodeli kojima se pokušava prilagoditi zahtjevima tržišta na kojem posluje osiguravatelj života.

Temelj svih modela životnih osiguranja je u ekvivalenciji svih uplata i isplata u danom vremenskom trenutku uvažavajući pri tome sve principe aktuarske i financijske matematike. Dakle, bez obzira koliko je raznolika košara modela životnih osiguranja, međusobni odnos svih uplata i planiranih isplata mora biti ekvivalentan u svakom trenutku tijekom cijelog perioda osiguranja.

4.1. Kamatna stopa kao bitan element tržišne cijene životnih osiguranja

Temelj svake police životnog osiguranja, odnosno svakog ugovora životnog osiguranja je određivanje njegove novčane vrijednosti u trenutku sklapanja ugovora. Vrijednost transakcije u sadašnjem trenutku različita je od njene vrijednosti u nekom budućem trenutku. Stoga se može reći kako je jedna od temeljnih zadaća upravljanja rizikom pravilno određivanje odnosa sadašnje i buduće vrijednosti novčane svote kao i upravljanje rizikom kod ulaganja sredstava s ciljem povećanja obujma.

Na usklađivanje sadašnje i buduće vrijednosti novčane svote izravno utječe kamata. Kamata je cijena koju zajmoprimac (dužnik) plaća zajmodavcu (kreditoru) za korištenje određene sume novca u određenom periodu.

Vlasnik novčanih sredstava donosi odluku o njihovom ulaganju s ciljem zadovoljenja i trenutnih i budućih potreba. Različita je uloga i vrijednost kamate ovisno promatramo li ju sa stajališta ulagatelja sredstava na štednju s ciljem uvećanja buduće vrijednosti ili sa stajališta zajmoprimca kome je kamata cijena nedostatka novčanih sredstava.

Nominalni iznos kamate je razlika između konačne sume novca po isteku perioda ukamaćivanja i nominalne vrijednosti glavnice. Budući nominalna vrijednost kamate izravno ovisi o nominalnom iznosu glavnice može se reći kako je kamatna stopa relativna mjera koja opisuje kamate.

Osiguravatelji se izravno susreću s kamatom u vidu rizika vezanog za vrijeme, odnosno u pogledu oblikovanja sredstava, ali u pogledu njihovog plasmana na financijsko tržište u cilju povećanja obujma. Društvo za osiguranje kroz premiju oblikuje svoje pričuve i sve to kroz dulji vremenski period. Kod životnih osiguranja vremenska komponenta je posebno istaknuta jer se životna osiguranja zaključuju na duže vremenske periode (doživotno osiguranje, osiguranje za slučaj doživljenja, mješovito osiguranje koje se ugovara na 5, 10, 15 ili 20 godina). Premija je gotovo uvijek konstantna novčana vrijednost, a vrijednost novca se kroz vrijeme mijenja pa se stvarna premija mijenja. Tu je skriven razlog zašto kamatna stopa ulazi u temeljni račun za obračun tarifa kod životnih osiguranja.

Jednostavna kamatna stopa se određuje kao odnos kamate i glavnice u jednom obračunskom razdoblju.

Na razini jednog obračunskog perioda (npr. godine, ako je godina obračunski period) kamatna stopa ima oblik:

$$p = \frac{I}{C_0} \cdot 100 \tag{4.1}$$

gdje je $p -$ kamatna stopa[12]

$I -$ nominalni iznos kamata, tj. razlika između uvećane i sadašnje vrijednosti.

$C_0 -$ glavnica

U ovom se slučaju obračunava jednostavna (ili prosta) kamata.

Za razliku od jednostavne kamate, složena kamata se koristi kada se kamata pripisuje u više obračunskih perioda tako što se glavnica iz prethodnog perioda uveća za iznos kamate i na uvećani iznos se pripisuje kamata za novi vremenski period.

Ako je poznata sadašnja vrijednost kapitala C_0, konačna ili buduća vrijednost se dobije dekurzivnim obračunom kamata tako što se krajem svakog perioda prethodna glavnica uveća za kamatu i tako uvećan čini početni iznos za slijedeći obračunski period.

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ C_n &= C_0 \cdot r^n \end{aligned} \tag{4.2}$$

[12] Kamatna stopa je broj novčanih jedinica na sto uloženih novčanih jedinica na rok koji je nominalno dan (najčešće na rok od jedne godine dana) uz jednostavni obračun.

gdje je:

$C_n -$ konačna (buduća) vrijednost, tj. iznos glavnice i složenih kamata na kraju roka dospijeća

$C_0 -$ glavnica

$p -$ nominalna (najčešće godišnja) kamatna stopa

$n -$ broj obračunskih perioda (najčešće godina)

$r -$ dekurzivni kamatni faktor

$$r = 1 + \frac{p}{100}. \tag{4.3}$$

Efektivna kamatna stopa je trošak za zajmoprimca ili povrat na depozit nakon što se svi troškovi i naknade vezane za kredit ili depozit uključe u kalkulaciju kamatne stope. Kamata se računa temeljem razlike između primljenog iznosa na kraju obračunskog razdoblja i nominalnog iznosa na koji glasi zajam odnosno financijski instrument, a efektivna kamatna stopa je odnos između tako utvrđenog iznosa kamata i primljene sume.

Ako je poznata konačna (uvećana) vrijednost kapitala C_n, sadašnja ili početna vrijednost je:

$$C_0 = \frac{C_n}{r^n}. \tag{4.4}$$

Ako se koristi anticipativni obračun kamata na početnu glavnicu C_0 uz godišnju anticipativnu kamatnu stopu konačna ili buduća vrijednost kapitala će biti:

$$C_n = C_0 \left(\frac{100}{100-q} \right)^n = C_0 \cdot \rho^n \tag{4.5}$$

gdje je $q -$ godišnja kamatna stopa za anticipativni obračun

$\rho -$ anticipativni kamatni faktor

$$\rho = \frac{100}{100-q}. \tag{4.6}$$

Ako je poznata konačna (uvećana) vrijednost kapitala C_n, sadašnja ili početna vrijednost uz anticipativni obračun kamata je:

$$C_0 = \frac{C_n}{\rho^n}. \tag{4.7}$$

Ugovori životnih osiguranja obvezuju osiguravatelja da pri nastanku osiguranog slučaja isplati osiguraniku (korisniku osiguranja) ugovorom određenu sumu novca, tzv. osiguranu sumu. Pri sklapanju ugovora je definirana vrijednost koja će biti isplaćena u nekom budućem vremenu pa se u trenutku sklapanja ugovora sadašnja vrijednost određuje dijeljenjem sa kamatnim faktorom potenciranim sa brojem godina koje su ugrađene u ugovor. Određivanje sadašnje vrijednosti uz poznatu konačnu (buduću) vrijednost često se naziva diskontiranje. Ove navedene formule za izračunavanje konačne i sadašnje vrijednosti kapitala primjenjuju se u slučaju kada je vrijeme na koje se odnosi obračun kamata određeno cijelim brojem obračunskih perioda (godina). Vrijeme je neprekidna varijabla pa će u slijedećem koraku biti izvedene formule za neprekidno ukamaćivanje.

Neka je m broj potperioda tijekom vremena n. Kamata se sada pripisuje za m malih vremenskih intervala (perioda). Ako broj potperioda m teži u beskonačnost, istovremeno period neprekidnog ukamaćivanja teži nuli pa imamo preduvjete za zakon neprekidnog ukamaćivanja.

$$C_{m \cdot n} = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^{m \cdot n} = C_0 \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m \cdot p}{100}}\right)^{\frac{m \cdot 100}{p}}\right]^{\frac{n \cdot p}{100}} = C_0 \cdot e^{\frac{n \cdot p}{100}} \tag{4.8}$$

jer je $$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m \cdot 100}{p}}\right)^{\frac{m \cdot 100}{p}} = e. \tag{4.9}$$

Formula je izvedena korištenjem relativnog kamatnjaka, no ovdje je naglasak na faktoru neprekidnog ukamaćivanja koji je uzrok akumulaciji kapitala.

Sadašnja vrijednost kapitala uz poznatu konačnu vrijednost u slučaju neprekidnog ukamaćivanja dobije se kao:

$$C_0 = \frac{C_n}{e^{\frac{n \cdot p}{100}}} = C_n \cdot e^{-\frac{np}{100}}. \tag{4.10}$$

Pri određivanju tarifa u osiguranju života za obračunsku kamatnu stopu se ne uzima trenutna tržišna kamatna stopa, jer je ona varijabilna kao posljedica promjena na financijskim tržištima. U većini zemalja razvijenog financijskog tržišta izbor tarifne kamatne stope nije u potpunosti prepušten osiguravateljima, nego ju određuju državne agencije i kreće se oko 3 – 4%. U Bosni i Hercegovini kamatna stopa je u intervalu 3 – 5%.

Pomoću tablica smrtnosti osiguravatelj određuje novčani iznos za osiguranje koji je nužan za isplatu osigurane sume u određenom vremenskom intervalu. Prema očekivanim isplatama u određenim periodima, a koristeći se formulom za obračun složenih kamata može se odrediti novčani iznos u početku osiguranja, odnosno u trenutku sklapanja ugovora.

Neka je S_n očekivana vrijednost isplata tijekom perioda *n*, izračunata korištenjem tablica smrtnosti. Neka je *p* obračunska kamatna stopa i sa *A* neka je označen iznos u trenutku sklapanja ugovora. Uz ove oznake vrijedi:

$$S_n = A \cdot r^n \Rightarrow A = \frac{S_n}{r^n}. \tag{4.11}$$

Ove su relacije utemeljene na algoritmima financijske matematike. U životnim osiguranjima temeljni su algoritmi aktuarske matematike. Kod oblikovanja matematičke pričuve prevagu imaju zakonitosti aktuarske matematike, a kod plasmana matematičke pričuve prevagu imaju zakonitosti financijske matematike. Dakle, kod procesa oblikovanja i plasmana matematičke pričuve koriste se algoritmi obje navedene primjenjene matematike.

Dakle za obračun početne vrijednosti osiguranja koriste se diskontni faktori. Diskontni faktor je matematički izraz za izračunavanje diskontne (sadašnje) vrijednosti nekog iznosa. Naziva se i faktor dekumulacije. Recipročna je vrijednost kamatnog faktora. Najčešće se nalazi izračunat u drugim financijskim tablicama, a za jednake periodične iznose u četvrtim financijskim tablicama[13].

$v_n = \dfrac{1}{r^n}$ u dekurzivnom obračunu kamata ,

$v_n = \dfrac{1}{\rho^n}$ u anticipativnom obračunu kamata.

[13] Račić-Žlibar,T., Andrijašević, S.: Rječnik osiguranja, Masmedia, Zagreb, 1997.

U stohastičkim modelima diskontni faktor je:

$$v_n = e^{-\delta n}. \tag{4.12}$$

Vremenski period diskontiranja osiguranih suma nije uvijek poznat, vezan je za trenutak doživljenja ili smrti osiguranika pa je time vezan za slučajnu varijablu vrijeme *T(x)*.

Osiguravatelj kroz uplate premija oblikuje sadašnju vrijednost fonda. Premije su često periodične uplate konstantnog iznosa u jednakim vremenskim intervalima a njihovim vrijednostima ekvivalentna je vrijednost osigurane sume. Nerijetko se premije plaćaju u više istih ili različitih iznosa u istim ili različitim vremenskim periodima.

U slučaju plaćanja premija u istom iznosu i u istim vremenskim periodima sadašnja vrijednost se računa pomoću jednakosti koja predstavlja sumu sadašnjih vrijednosti svake premije u pripadajućem diskontnom periodu.

Iznos prve premija P_1 koja će biti uplaćena na kraju prvog perioda se diskontira za jedan vremenski period, iznos druge premije P_2 se diskontira kroz dva zadana perioda itd.

Sadašnja vrijednost svih planiranih premija je:

$$A = \frac{P_1}{r} + \frac{P_2}{r^2} + \ldots \frac{P_n}{r^n}, \tag{4.13}$$

Ako su premije stalnog (jednakog) iznosa *P*, možemo pisati $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = P$

Sada je sadašnja vrijednost svih premija dana sa:

$$A = \frac{P}{r} + \frac{P}{r^2} + \ldots \frac{P}{r^n} = P\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n}\right) \tag{4.14}$$

U zagradi je konačni geometrijski red čiji je prvi član $a_1 = \frac{1}{r}$ i kvocijent $q = \frac{1}{r}$ pa znajući sumu konačnog geometrijskog reda možemo pisati

$$A = P \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r} - 1} \tag{4.15}$$

Nakon sređivanja ovog dvojnog razlomka dobije se:

$$A = P \cdot \frac{r^n - 1}{r^n (r-1)}. \tag{4.16}$$

Dobivena jednakost je sadašnja vrijednost premija ako su jednakog iznosa uz dekurzivni obračun kamata.

Ako je obračun kamata anticipativni sadašnja vrijednost svih premija jednakog iznosa koje se uplaćuju periodično ekvivalentna je prethodno izvedenoj jednakosti:

$$A = P \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho - 1)} \tag{4.17}$$

Kamatna stopa kao determinanta određivanja tarifa u osiguranju života izvor je rizika u svom iznosu koji može biti podcijenjen (u tom slučaju je premija uvećana) što se može reflektirati na tržištu smanjenim brojem osiguranika. S druge strane precijenjena kamatna stopa što za rezultat može imati ugroženu likvidnost društva za osiguranje. Dakle, rizik kamatne stope se ne odražava samo na osiguravatelja nego i na osiguranika. Stoga je stabilnost osiguravateljnog sektora i razvijenost osiguranja uvjetovana razvijenim i stabilnim financijskim tržištem.
S druge strane osiguravatelji kao investitori na financijskom tržištu suočavaju se sa rizicima koji su posljedica različitih i čestih kretanja i lomova na financijskim tržištima, a i sa rizikom vremena.

4.2. Životno osiguranje u obliku jednokratne neto premije

Uplatama premije osiguranja oblikuju se fondovi osiguravatelja radi obavljanja njihove djelatnosti. Sredstva fondova značajna su za funkciju osiguranja pa je svakom osiguravatelju važno pitanje formiranja fondova sa aspekta ispunjenja obveza prema osiguranicima i likvidnosti poslovanja općenito.
Fondove osiguravatelja čine:

- slobodna sredstva koja služe za održavanje solventnosti,
- tehničke pričuve koje osiguravatelj upotrebljava za pokriće svojih obveza prema osiguranicima.[14]

U životnim osiguranjima dio tehničke pričuve je matematička pričuva pa je način pokrića obveza po ugovorima iz osiguranja vezan izravno za matematičku pričuvu.
Osiguravatelji života kumuliraju sredstva štednje, odnosno sredstva za pokriće rizika u kasnijim godinama i to na bazi određene rizičnosti (koja može biti prosječna ili drugačija

[14] S. Andrijašević, V. Petranović, Ekonomika osiguranja, Alfa, Zagreb, 1999., str. 240.

zavisno od modela životnog osiguranja) tako što premija u prvim godinama osiguranja, kada je rizičnost manja, pokriva obveze u kasnijim godinama kada je rizičnost veća.
Ovisno o periodičnosti i načinu uplata premija različitim intenzitetom se oblikuje matematička pričuva. Taj intenzitet ne podrazumijeva kumuliranje premija nego i diktira upravljanje i plasman slobodnih sredstava matematičke pričuve na financijskim tržištima, kao i na drugim dozvoljenim tržištima (npr. tržištu realnih dobara).
Različiti su efekti uplata jednokratnih premija ili višekratnih premija ovisno i o modelu životnog osiguranja.

(i) Osiguranja fiksnog kapitala

Karakteristike svakog oblika osiguranja su broj uplata premija, varijabilnost premija, vrijeme trajanja osiguranja, broj isplata osigurane sume i varijabilnost osiguranog iznosa.
Osnovni modeli osiguranje kapitala su:

- osiguranje za slučaj doživljenja
- osiguranje za slučaj smrti
- mješovito osiguranje

Svi navedeni modeli osiguranja imaju svoje dodatne oblike koji se prilagođavaju zahtjevima tržišta, odnosno potrošača ili klijenata, općenito osiguranika.
Radi jednostavnosti izlaganja analizirati ćemo slučaj kada se osigurana suma isplaćuje korisniku osiguranja odjednom na kraju godine u kojoj su se ispunili uvjeti osiguranja iz ugovora.
Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja je oblik osiguranja u kojem osiguravatelj isplaćuje osiguranu sumu samo onim osiguranicima koji dožive ugovoreni rok osiguranja. Ako je osoba stara x godina osigurala iznos od K novčanih jedinica u slučaju doživljenja $x+n$ godina uz jednokratnu premiju $A_{x\bar{n}|}$ novčane jedinice tada će ukupna uplata osiguravatelju u početku osiguranja biti umnožak broja živih osoba l_x starih x godina i iznosa jednokratne neto premije.

$$l_x \cdot A_{x\bar{n}|} = K \cdot \frac{l_{x+n}}{r^{x+n}} \tag{4.18}$$

odnosno

$$A_{x\bar{n}|} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{4.19}$$

Osiguranje kapitala za slučaj smrti je oblik osiguranja kada se osigurana suma isplaćuje samo ako osiguranik star x doživi k godina i umre u jednoj od narednih n godina. Ako jednokratnu premiju za jednu novčanu jedinicu osigurane sume označimo sa $\ddot{A}_{x\overline{n}|}$ tada će ukupna uplata osiguravatelju u početku osiguranja biti $l_x \cdot \ddot{A}_{x\overline{n}|}$.

Izjednačavajući uplatu sa sumom diskontiranih (na sadašnju vrijednost, tj. na dan osiguranja) isplata, a koristeći komutativne brojeve vrijedi:

$$D_x \cdot \ddot{A}_{x\overline{n}|} = C_{x+k} + C_{x+k+1} + ... + C_{x+k+n-1} \tag{4.20}$$

odnosno

$$\ddot{A}_{x\overline{n}|} = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x} \tag{4.21}$$

Jednokratna premija za osiguranu sumu iznosa K je $K \cdot \ddot{A}_{x\overline{n}|}$.

Ako je u prethodnoj jednakosti $k = 0$ radi se o neposrednom privremenom osiguranju kapitala i tada jednokratna premija za 1 novčanu jedinicu osiguranog kapitala se računa kao:

$$\ddot{A}_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{4.22}$$

pa je jednokratna premija za osiguranu sumu K jednaka

$$\ddot{A}_{x\overline{n}|} = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{4.23}$$

Ako $n = \omega - x$, pri čemu je ω duboka starost, onda je to odgođeno doživotno osiguranje kapitala i vrijedi:

$$\ddot{A}_{x\overline{n}|} = K \cdot \frac{M_{x+k}}{D_x} \tag{4.24}$$

Ako je $k = 0$ i $n = \omega - x$ dobije se veza jednokratne neto premije i osiguranog kapitala za neposredno doživotno osiguranje kapitala:

$$\ddot{A}_{x\overline{n}|} = K \cdot \frac{M_x}{D_x} \tag{4.25}$$

Mješovito osiguranje je model osiguranja kapitala u kojem je osiguravatelja dužan isplatiti korisniku osiguranja iznos osigurane sume ako osigurana osoba stara x godina umre u slijedećih n godina ili osiguraniku ako doživi $x+n$ godina. Neka je jednokratna neto premija za jednu novčanu jedinicu osigurane sume jednaka $\overline{A}_{x\overline{n}|}$ pa vrijedi:

$$\overline{A}_{x\overline{n}|} = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{4.26}$$

Iz svih navedenih jednakosti koje povezuju jednokratnu neto premiju i osiguranu sumu kapitala vidljiva je veza u obliku proporcionalnosti pri čemu je koeficijent proporcionalnosti vezan za omjer komutativnih brojeva. U omjeru komutativnih brojeva stalno je prisutan rizik vezan za tablice smrtnosti odnosno za procijenjenu vjerojatnost smrtnosti.

4.3. Životno osiguranje u obliku višekratne neto premije

Osiguranje koje se ugovara u obliku jednokratne neto premije često je opterećujuće za osiguranika. Opterećenje uplate osiguranja jednim iznosa kojim bi osiguranik mogao osigurati određeni kapital jače je izraženo u manje razvijenim gospodarstvima kao što je i u slučaju Bosne i Hercegovine. Osiguranici će lakše uplate za osiguranje podijeliti u konstantne iznose tijekom jednakih vremenskih intervala. Ovakve periodične uplate, tj. višekratne neto premije ovise o modelu osiguranja i starosnoj dobi osiguranika. Svi modeli osiguranja podržavaju uplate višekratnih premija. Višekratne neto premije možemo smatrati periodičnim uplatama jednakog iznosa ili uplatama renti koje osiguranik uplaćuje osiguravatelju doživotno ili određeni broj godina ovisno o uvjetima odabranog modela osiguranja.

Postoje četiri osnovne kombinacije odnosa višekratnih uplata premije i isplata osiguranog kapitala:[15]

(i) višekratne jednake premije i osigurani fiksni kapital,
(ii) višekratne jednake premije i osigurani varijabilni kapital,
(iii) višekratne varijabilne premije i osigurani fiksni kapital,
(iv) višekratne varijabilne premije i osigurani varijabilni kapital.

Slijedi analiza veze između *jednakih višekratnih premija i osiguranog fiksnog kapitala*. Neka je $P(A_{x\overline{n}|})$ sadašnja vrijednost svih uplaćenih premija za slučaj doživljenja tada vrijedi:

[15] Šain, Ž., ibidem, str. 119.

$$P(A_{x\overline{n|}})\cdot(D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+...+D_{x+n-1})=K\cdot D_{x+k} \tag{4.27}$$

$$P(A_{x\overline{n|}})=K\frac{D_{x+k}}{N_x-N_{x+n}},\ \text{za}\ k\geq n \tag{4.28}$$

Iz posljednje jednakosti jasno je vidljiv stalni rast matematičke pričuve tijekom cijelog osiguranja. Na kraju osiguranja matematička pričuva će dosegnuti iznos osiguranog kapitala.

Za doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti vrijedi:

$$P(\ddot{A}_{x\overline{n|}})\cdot(D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+...+D_{x+n-1})=K\cdot(C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+...) \tag{4.29}$$

$$P(\ddot{A}_{x\overline{n|}})=K\cdot\frac{M_x}{N_x-N_{x+n}} \tag{4.30}$$

Matematička pričuva neposrednog doživotnog osiguranja kapitala raste tijekom perioda uplata sve dok na kraju osiguranja ne postigne iznos osiguranog kapitala.

Za neposredno privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti:

$$P(\ddot{A}_{x\overline{n|}})=K\cdot\frac{M_x-M_{x+k}}{N_x-N_{x+n}},\ \text{za}\ k\geq n. \tag{4.31}$$

Matematička pričuva opada tijekom cijelog perioda i na kraju je pričuva jednaka nuli.

Za odgođeno doživotno osiguranje kapitala

$$P({}_k\ddot{A}_{x\overline{n|}})=K\cdot\frac{M_{x+k}}{N_x-N_{x+n}},\ \text{za}\ k\geq n. \tag{4.32}$$

Matematička pričuva raste za vrijeme perioda uplata premije, potom se približava iznosu osiguranog kapitala.

Za odgođeno privremeno osiguranje kapitala:

$$P({}_k\ddot{A}_{x\overline{n|}})=K\cdot\frac{M_{x+k}-M_{x+k+p}}{N_x-N_{x+n}},\ \text{za}\ k+p\geq n. \tag{4.33}$$

Matematička pričuva tijekom perioda uplata raste, a u periodu isplata osiguranog kapitala opada i na kraju osiguranja jednaka je nuli.

Za mješovito osiguranje kapitala:

$$P(\overline{A}_{x\overline{n}|}) = K \cdot \frac{M_x - M_{x+k} + D_{x+k}}{N_x - N_{x+n}}, \text{ za } k \geq n. \tag{4.34}$$

Matematička pričuva raste tijekom cijelog perioda osiguranja, a na kraju osiguranja jednaka je osiguranom kapitalu.

Ako su uplate *višekratne jednakim premijama za osigurani varijabilni kapital* treba ponovo razlikovati nekoliko kombinacija životnog osiguranja kapitala.

Ako se radi o osiguranju varijabilnog kapitala onda se, u odnosu na osiguranje fiksnog kapitala, mijenja desna strana jednakosti. Razlog tome je ne konstantan iznos kapitala K nego se taj iznos mijenja sa varijabilnim iznosima $(K_1 \pm jd)$ za svaki j-ti period.

Za neposredno doživotno osiguranje kapitala

$$P(\ddot{A}_{x\overline{n}|}) \cdot (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + ... + D_{x+n-1}) = K \cdot C_x + (K_1 \pm d) \cdot C_{x+1} + (K_2 \pm 2d) \cdot C_{x+2} + ... \tag{4.35}$$

$$P(\ddot{A}_{x\overline{n}|}) = \frac{K_1 M_x \pm dR_{x+1}}{N_x - N_{x+n}} \tag{4.36}$$

Matematička pričuva raste kao i u slučaju višekratnih premija i fiksnog kapitala.

U slučaju odgođenog doživotnog osiguranja kapitala razlika je vidljiva u brojniku u odnosu na prethodno opisani model:

$$P({}_k\ddot{A}_{x\overline{n}|}) = \frac{K_1 M_{x+k} \pm dR_{x+k+1}}{N_x - N_{x+n}}, \ k \geq n. \tag{4.37}$$

Matematička pričuva raste kao i ekvivalentnom modelu za fiksni kapital.

Za neposredno privremeno osiguranje kapitala vrijedi zakonitost iskazana slijedećom jednakosti:

$$P(\ddot{A}_{x\overline{n}|}) = \frac{K_1 \cdot (M_x - M_{x+k}) \pm d\left(R_{x+1} - R_{x+k} - (k-1)M_{x+k}\right)}{N_x - N_{x+n}}, \text{ za } k \geq n \tag{4.38}$$

Matematička pričuva se smanjuje tijekom cijelog perioda i na kraju osiguranja je jednaka nuli.

Za odgođeno privremeno osiguranje kapitala vrijedi:

$$P({}_k\ddot{A}_{x\overline{n}|}) = \frac{K_1(M_{x+k} - M_{x+k+p}) \pm d\left(R_{x+k+1} - R_{x+k+p} - (p-1)M_{x+k+p}\right)}{N_x - N_{x+n}}, \text{ za } k + p \geq n \tag{4.39}$$

Matematička pričuva raste u periodu uplata, potom se smanjuje u periodu isplata i na kraju osiguranja je jednaka nula.

Za mješovito osiguranje kapitala

$$P(\overline{A}_{x\overline{n}|}) = \frac{K_1\left(M_x - M_{x+k} + D_{x+k}\right) \pm d\left(R_{x+1} - R_{x+k} - (k-1)(M_{x+k} + D_{x+k})\right)}{N_x - N_{x+n}}, \text{ za } k \geq n \tag{4.40}$$

Rast matematičke pričuve je prisutan i ovdje sve dok ne primi iznos osiguranog kapitala.

Za slučaj *višekratnih varijabilnih premije i osiguranog fiksnog kapitala* logika izračuna ostaje ista samo se sada varijabilnost iznosa veže za premije, a ne za kapital. Sada će lijeva strana jednakosti biti suma diskontiranih varijabilnih uplata premije što mora bit jednako fiksnom iznosu kapitala u tom istom trenutku.

Varijabilni iznosi premije su $\left(P_1 \pm jd\right)$ pri čemu je *j* vezan za period diskontiranja.

Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja kao i u prethodnom odnosima premija i fiksnog kapitala ima karakteristiku neprekidnog rasta matematičke pričuve.

$$P_1 = \frac{KD_{x+k} \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}}, \text{ za } k \geq n. \tag{4.41}$$

Ako je predmet ugovora neposredno doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti vrijedi:

$$P_1 = \frac{KM_x \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}} \tag{4.42}$$

Za slučaj odgođenog doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti

$$P_1 = \frac{KM_{x+k} \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}}, \text{ za } k \geq n. \tag{4.43}$$

Neposredno privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti ogleda se u slijedećoj jednakosti:

$$P_1 = \frac{K(M_x - M_{x+k}) \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}}, \text{ za } k \geq n \tag{4.44}$$

Odgođeno privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti

$$P_1 = \frac{K(M_{x+k} - M_{x+k+p}) \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}}, \text{ za } k + p \geq n \tag{4.45}$$

Mješovito osiguranje kapitala za slučaj smrti:

$$P_1 = \frac{K(M_x - M_{x+k} + D_{x+k}) \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}}, \text{ za } k \geq n. \tag{4.46}$$

Kretanje matematičke pričuve je ekvivalentno modelima za fiksni kapital i višekratne jednake premije.

Za vezu varijabilnih premija i osiguranog varijabilnog kapitala karakteristična je varijabilnost, a sukladno tome i sumiranje sadašnjih vrijednosti na lijevoj i na desnoj strani jednakosti koja opisuje ovakvu kombinaciju osiguranja i premije.
Promjena između dvije premije u susjednim intervalima bit će kao i do sada *d*, a promjena između dva iznosa kapitala u susjednim vremenskim periodima neka je *d'* novčanih jedinica.
Za neposredno doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti slijedi

$$P_1 = \frac{K_1 M_x \pm d' R_{x+1} \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}} \tag{4.47}$$

Odgođeno doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti

$$P_1 = \frac{K_1 M_{x+k} \pm d' R_{x+k+1} \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}}, \text{ za } k \geq n. \tag{4.48}$$

Neposredno privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti

$$P_1 = \frac{K_1(M_x - M_{x+k}) \pm d'(R_{x+1} - R_{x+k} - (k-1)M_{x+k}) \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}}, \qquad (4.49)$$

za $k \geq n$.

Odgođeno privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti

$$P_1 = \frac{K_1(M_{x+k} - M_{x+k+p}) \pm d'(R_{x+k+1} - R_{x+k+p} - (p-1)M_{x+k+p}) \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}},$$

za $k + p \geq n$ (4.50)

Mješovito osiguranje kapitala

$$P_1 = \frac{K_1(M_x - M_{x+k} + D_x) \pm d'(R_{x+1} - R_{x+k} - (k-1)(M_{x+k} + D_{x+k})) \pm d\left(S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\right)}{N_x - N_{x+n}},$$

za $k \geq n$. (4.51)

Kretanje matematičke pričuve istog je predznaka kao u kombinaciji višekratne jednake premije i osigurani fiksni kapital.

4.4. Životno osiguranje sa eksponencijalnom funkcijom smrtnosti

Svi oblici osiguranja života su izravno vezani za vjerojatnost doživljenja i intenzitet smrtnosti. U poglavlju tri prikazan je rizik koji je prisutan u slučaju aproksimacije slučajne varijable $T(x)$ pomoću normalne razdiobe.

Pretpostavimo da je funkcija intenziteta smrtnosti zadovoljena za $\mu(x+t) = \mu$ što je konstanta u svim uzrastima i vremenu. U tom slučaju formula (3.32) jednaka je

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y \, dy \right) = e^{-\mu t} \qquad (4.52)$$

U eksponentu je integral s negativnim predznakom što znači monotoni pad linearne funkcije μt. To zato što je funkcija $\mu(x)$ konstanta, odnosno graf je pravac paralelan sa x-osi. Površina ispod krivulje je jednostavno umnožak baze $(x+t) - x$ i visine μ. U tom slučaju sadašnja dob x zapravo ne utječe na vjerojatnost preživljavanja. Drugim riječima ${}_t p_x$ je jednako ${}_t p_y$ za bilo koji x i y sve dok je temeljni μ isti. To dalje znači trenutna vjerojatnost smrti je ista u svakom vremenskom trenutku.[16]

Vrijedi slijedeće:

$$F(x) = 1 - e^{-\mu t},$$
$$f(x) = \mu e^{-\mu t}. \tag{4.53}$$

Dakle očekivano preostalo vrijeme života u eksponencijalnom modelu je:

$$E(T(x)) = \int_0^\infty t \cdot \mu \cdot e^{-\mu t} \cdot dt = \frac{1}{\mu} \tag{4.54}$$

Na primjer: kada je $\mu = 0.10$ očekivana vrijednost preostalog vremena života je $E(T(x)) = 10$, kada je $\mu = 0.05$ očekivana vrijednost preostalog vremena života je $E(T(x)) = 20$.

Slijedi tablica u kojoj su prikazane vjerojatnosti smrtnosti prema eksponencijalnoj funkciji razdiobe.

Tablica 2. Vjerojatnosti smrtnosti prema eksponencijalnoj funkciji razdiobe

Godina	$F(t)$	$f(t)$	$\frac{f(t)}{1-F(T)}$
1	3.92%	3.843%	4.00%
5	18.13%	3.275%	4.00%
10	32.97%	2.681%	4.00%
15	45.12%	2.195%	4.00%
20	55.07%	1.797%	4.00%
25	63.21%	1.472%	4.00%
30	69.88%	1.205%	4.00%
35	86.47%	0.541%	4.00%
40	79.81%	0.808%	4.00%
45	83.47%	0.661%	4.00%
50	75.34%	0.986%	4.00%

Izvor: Milevsky, M.,A.: The Calculus of Retirement Income, Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Cambridge University Press, New York, 2006

[16] M.,A., Milevsky: The Calculus of Retirement Income, Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Cambridge University Press, New York, 2006

Za vrijednosti u tablici korištena je očekivana vrijednost starosti $E(T)=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{0{,}04}=25$ godina.

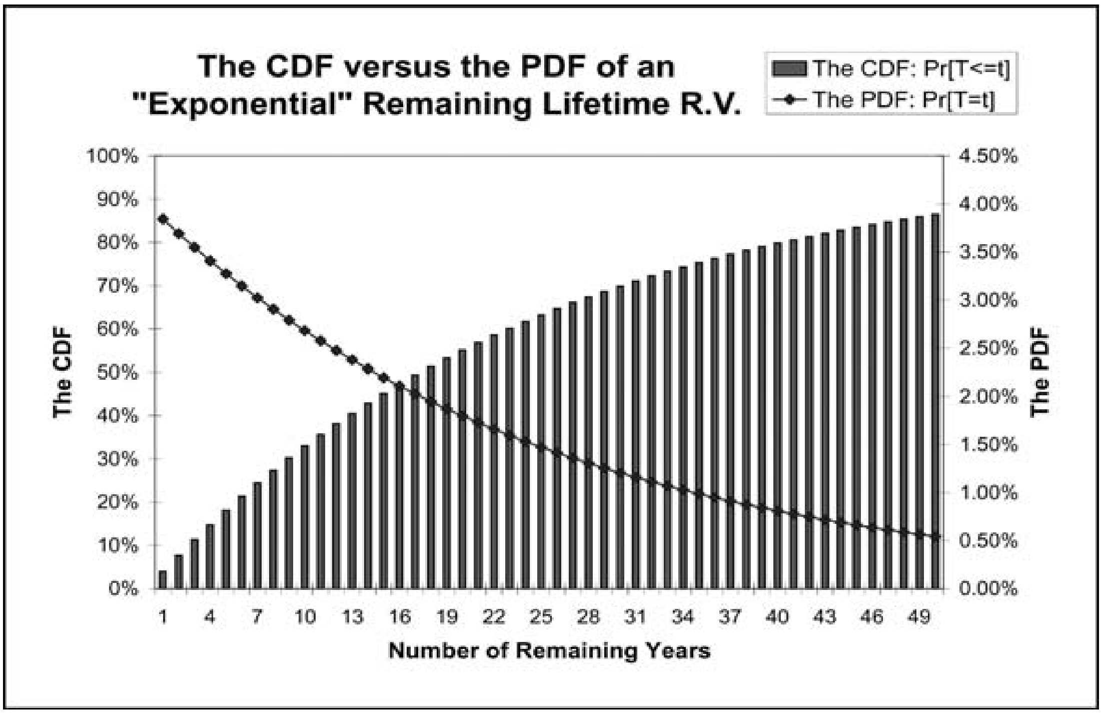
Interpretacija vjerojatnosti prikazanih u tablici znači na pr. osoba živa u sadašnjem trenutku umrijet će za 20 godina s vjerojatnosti 55.07%, a vjerojatnost umiranja tijekom 20 godina je 1.797%.

Nasuprot tome medijalna vrijednost preostalog životnog vijeka se dobiva integracijom funkcije gustoće vjerojatnosti $f(x)$ od vremena 0 do medijalne vrijednosti preostalog životnog vijeka, zatim slijedi rješenje za medijan preostalog vremena života $M(T(x))$:

$$\frac{1}{2}=e^{-\mu M(T(x))} \quad \Leftrightarrow \quad M(T(x))=\frac{\ln 2}{\mu}<\frac{1}{\mu}. \tag{4.55}$$

Dakle, kada je $\mu=0.05$ medijan preostalog vremena života je $M(T(x))=\frac{\ln 2}{0{,}05}=13{,}862$ godina nasuprot očekivanoj vrijednosti preostalog vremena života $E(T(x))=\frac{1}{0{,}05}=20$ godina.

Slika 5. Broj preostalih godina života uz pretpostavku eksponencijalne razdiobe za slučajnu varijablu $T(x)$



Izvor: M.,A., Milevsky: The Calculus of Retirement Income, Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Cambridge University Press, New York, 2006

Na slici je prikazana procjena smrtnosti pomoću eksponencijalne funkcije u odnosu na podatke normalne distribucije o kojoj je bilo riječi ranije.
Eksponencijalni zakon smrtnosti koristi se za prevladavanje nekih problema kod modela normalne razdiobe.
Koristeći eksponencijalni model smrtnosti smanjujemo rizik odstupanja smrtnosti od prirodnih (realnih ili stvarnih) vrijednosti a time izravno utječemo na formiranje premije životnih osiguranja i svakako smanjujemo rizik pri oblikovanju matematičke pričuve osiguranja.

4.5. Životno osiguranje sa Gama funkcijom smrtnosti

Gama funkcija je definirana integralom

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad \text{za} \quad \alpha \succ 0. \tag{4.56}$$

Iz definicije slijedi $\Gamma(1)=1$

Tri najvažnija svojstva gama funkcije su:

$$\forall\alpha \succ 1 \ \Rightarrow\ \Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

$$\forall n \in N \ \Rightarrow\ \Gamma(n)=(n-1)!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Za opisivanje funkcije smrtnosti ne može se koristiti potpuna gama funkcija nego se definira nepotpuna gama funkcija. Za potrebe opisivanja zakona smrtnosti, odnosno funkcije doživljenja nepotpunu gama funkciju su definirali Gompertz i Makaham u jednom obliku svog zakona smrtnosti.
Kada je osoba stara x godina doživi očekivanu (modalnu) starost m godina, odnosno kada je $x=m$ tada Gompertz-Makaham funkcija intenziteta smrtnosti je $\mu(m)=\mu+\frac{1}{b}$, pri čemu je b koeficijent disperzije, ali kada je osoba mlađa od m godina tada je Gompertz-Makaham funkcija intenziteta smrtnosti je $\mu(x)<\mu+\frac{1}{b}$ i kada je osoba starija od m godina tada je

Gompertz-Makaham funkcija intenziteta smrtnosti je $\mu(x) \succ \mu + \frac{1}{b}$. To znači da je $x = m$ samo poseban slučaj odnosno jedna točka na krivulji intenziteta smrtnosti.

Prema jednakosti br. (4.52) uvjetna vjerojatnost doživljenja prema Gompertz-Makaham funkcija intenziteta smrtnosti je dana sa[17]:

$$ {}_t p_x = \exp\left(- \int_x^{x+t} \left(\mu + \frac{1}{b} e^{\frac{y-m}{b}} \right) dy \right) = \exp\left(- \mu t + b(\mu(x) - \mu)(1 - e^{\frac{t}{b}}) \right) \tag{4.57} $$

i $\qquad F(x) = 1 - {}_t p_x$.

Iz prethodnog je jasno da vjerojatnost doživljenja opada sa koeficijentom μ .

Koristeći jednakosti $\qquad f(x) = F'(x) \qquad$ i $\qquad f(t) = {}_t\, p_x \mu(x+t) \qquad$ (4.58)

Dobiva se:

$$ f(t) = \exp\left(- \mu t + b(\mu(x) - \mu)(1 - e^{\frac{t}{b}}) \right) \cdot \left(\mu + \frac{1}{b} e^{\frac{x+t-m}{b}} \right) \tag{4.59} $$

Ovo je Gompertz-Makahov zakon pomnožen sa funkcijom intenziteta smrtnosti $\mu(x+t)$.

Očekivani preostali dio životnog vijeka prema Gompertz-Makahamovom zakonu smrtnosti je:

$$ E(T_x) = \int_0^{\infty} \exp\left(- \mu t + b(\mu(x) - \mu)(1 - e^{\frac{t}{b}}) \right) dt = \frac{b\Gamma\left(- \mu b, b(\mu_x - \mu) \right)}{e^{(m-x)\mu + b(\mu - \mu_x)}}, \tag{4.60} $$

Gdje je

$$ \Gamma(a, c) = \int_c^{\infty} e^{-t} t^{(a-1)} dt \tag{4.61} $$

nepotpuna gama funkcija.

U tablicama koje slijede prikazani su primjeri očekivanog životnog vijeka prema Gompertz-Makahamovom zakonu smrtnosti.

[17] M.,A., Milevsky, Ibidem, str. 48.

Tablica 3. Primjeri očekivanog životnog vijeka prema Gompertz-Makahamovom zakonu smrtnosti za žene

Godina (x)	m	b	$x+E(T_x)$
30	88.8379	9.213	83.61
40	88.8599	9.160	83.82
50	88.8725	9.136	84.21
60	88.8261	9.211	84.97
65	88.8403	9.183	85.69

Izvor: M.,A., Milevsky: The Calculus of Retirement Income, Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Cambridge University Press, New York, 2006

Prema Gompertz-Makahamovom zakonu smrtnosti koji se oslanja i na gama funkciju očekivani životni vijek žene stare 30 godina je 83.61 godinu odnosno vjerojatnost umiranja je najveća u 84. godini života. Slično tumačenje vrijednosti u tablici su za ostale starosti.
Procijenjene vrijednosti u tablici su izračunate uz navedenu modalnu ili očekivanu starost m i navedeni koeficijent disperzije.

Tablica 4. Primjeri očekivanog životnog vijeka prema Gompertz-Makahamovom zakonu smrtnosti za muškarce

Godina (x)	m	b	$x+E(T_x)$
30	84.4409	9.888	78.94
40	84.4729	9.831	79.31
50	84.4535	9.922	79.92
60	84.2693	10.179	81.17
65	84.1811	10.282	82.25

Izvor: M.,A., Milevsky: The Calculus of Retirement Income, Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Cambridge University Press, New York, 2006

Prema Gompertz-Makahamovom zakonu smrtnosti koji se oslanja i na gama funkciju očekivani životni vijek muškaraca za odabrane godine prikazan je u prethodnoj tablici. Procijenjene vrijednosti u tablici su izračunate uz navedenu modalnu ili očekivanu starost m i navedeni koeficijent disperzije.
Usporedbom očekivanih vrijednosti u tablicama uočava se dulji životni vijek kod žena nego kod muškaraca.

4.6. Varijacije u životnom osiguranju

Životno osiguranje se odnosi na sve modele osiguranja u kojima prestankom ili trajanjem života jedne ili više osoba dolazi do isplate osigurane sume koju je obvezan isplatiti osiguravatelj. Osiguranje života je poznat oblik osiguranja širom svijeta zbog svoje specifičnosti jer se radi o osiguranju, prvenstveno rizika smrti. No nije samo rizik smrti osigurljivi rizik životnih osiguranja. Životno osiguranje je jedan oblik štednje pa se često imenuje kao štedno osiguranje i ne samo štedno nego, ono nerijetko podrazumijeva i naknadu štete ukoliko se osiguraniku dogodi nesretni slučaj tijekom osiguranja. To je složeni „paket" osiguranja: sastoji se, metodološki gledano, iz dva proizvoda: jednog iz skupa životnih osiguranja i jednog iz skupa neživotnih osiguranja.

Malo je razvijenih osiguravatelja u razvijenom dijelu svijeta koji u svom portfelju nemaju osiguranje života. Ovisno o razvijenosti sustava osiguranja varijacije u modelima životnih osiguran su više ili manje izražene. U razvijenijem osiguravateljnom sektoru veći je spektar modela osiguranja nego u manje razvijenim sustavima. Osnovni modeli osiguranja su modeli osiguranja renti i modeli osiguran kapitala. Unutar svakog modela pojedinačno postoji više oblika osiguranja.

Osiguranje kapitala može biti za slučaj smrti, slučaj doživljenja i mješovito osiguranje kapitala. Svaki od tri navedena modela može biti uz jednaki iznos ili pak uz varijabilni iznos uplata. Unutar svakog spomenutog podmodela postoji veći ili manji broj varijacija neposrednog ili odgođenog, odnosno privremenog ili doživotnog osiguranja.

Svaki od nabrojanih oblika i podoblika osiguranja kapitala može biti vezan ili obračunat uz jednokratnu uplatu ili uz višekratne uplate.

Slično se modeli osobnih renti razlikuju prema tome jesu li rente fiksne ili varijabilne, odnosno jesu li godišnje ili ispodgodišnje, odgođene ili neposredne i sl.

Osiguravatelji života osim životnih osiguranja nude i osiguranja od posljedica nesretnog slučaja (osiguranje na poslu, osiguranje u prometu, osiguranje gostiju u turizmu, osiguranje školske djece u školi i sl.)

Zanimljivi su i modeli osiguranja za slučaj vjenčanja i za slučaj rođenja. Zatim u novije vrijeme javlja se oblik životnih ili rentnih osiguranja kod kojih osiguranik preuzima na sebe investicijski rizik.

Tontine je osiguranje kod kojeg se osiguranici dogovore da će zajednički kapitalizirati svoje doprinose i podijeliti tako kapitaliziranu imovinu između onih osiguranika koji dožive određenu starost odnosno između nasljednika umrlih osiguranika.

Osiguranje s kapitalizacijom isplate temelji se na aktuarskim izračunima te predstavlja osiguranje kod kojeg osiguranik prima u zamjenu za jednokratno odnosno obročno uplaćivanje premija, isplate u određenoj visini kroz određeno razdoblje.
Kako se društvo razvija potrebe za životnim osiguranjima se također razvijaju i prilagođavaju trenutnom stanju kako pojedinaca (korisnika) osiguranja tako su i odraz (slika) ekonomske razvijenosti i stabilnosti društva u kojem posluje društvo za osiguranje.
Svaki novi model osiguranja zahtjeva posebno i pažljivo određivanje neto premije koja mora sadržavati u sebi sve posebnosti novog modela osiguranja.
Opći model za jednokratnu neto premiju osiguranja života može se pisati u obliku:

$$\int_u^n e^{-pt} f(t)dt = \left(e^{-pn}F(n) - e^{-pu}F(u)\right) - p\left(\int_u^n {}_t p_x e^{-pt}dt - \int_u^n e^{-pt}dt\right) \qquad (4.62)$$

Ova jednakost se može pisati i u obliku[18]

$${}_u A_{x:n} = (e^{-pt}F(n) - e^{pu}F(u)) - p({}_u a_{x:n}) - (e^{-pn} - e^{-pu}) \qquad (4.63)$$

Ova jednakost predstavlja iznos jednokratne neto premije za policu životnog osiguranja za osobu staru *x* godina, gdje je *u* rok odgode i *n* period privremenog pokrića, pri čemu je ${}_u a_{x:n}$ iznos koji će primiti osiguranik (osoba) star *x* godina nakon *u* godina i tijekom *n* perioda.
Ova jednadžba se može koristiti za obračun široke palete životnih osiguranja, kako privremenih tako i trajnih.
Treba se prisjetiti kako je u slučaju Gompertz-Makahove smrtnosti kumulativna funkcija razdiobe $F(t) = 1 - \exp\left\{-\mu t + e^{(x-m)/b}(1 - e^{t/b})\right\}$, koja ima vrijednosti $F(0) = 0$ kada je $t = 0$ i $F(\infty) \to 1$ kada $t \to \infty$.

4.7. Trajanje životnog osiguranja

Ugovori o osiguranju životna su, u pravilu, dugoročni, odnosno sklapaju se s rokom trajanja od deset, petnaest, dvadeset i više godina, a ponekad i za vrijeme trajanja cijelog života. Prema odredbama o početku trajanja ugovora o osiguranju života valja razlikovati materijalno-pravni početak od formalno-pravnog početka trajanja ugovora o osiguranju

[18] Milevsky, M.,A., Ibidem, str. 152.

života. Formalno-pravni početak je vrijeme zaključenja ugovora, dakle trenutak susreta usuglašenih volja dviju stranaka. Materijalno-pravni početak je trenutak od kojeg osiguravatelj snosi rizik osiguranja. Formalni početak u pravilu ne podudara se s materijalnim početkom. Za materijalni početak ugovora o osiguranju zakonski se postavlja uvjet uplate premije osiguranja, odnosno prve premije[19].

Trajanje osiguranja znači formalni početak i formalni završetak osiguravajućeg odnosa, a vrijeme pokrića materijalni početak i završetak osiguravajućeg odnosa. Trajanje osiguranja i vrijeme pokrića moraju biti navedeni u polici osiguranja, odnosno u uvjetima osiguranja[20].

Vremenski period koji određuje trajanje životnog osiguranja izravno utječe na iznos premije. Naime, duži rok trajanja osiguranja iz perspektive osiguravatelja je zanimljiviji stoga što će ulaganje i akumuliranje matematičke pričuve biti vezano za dulji rok pa je za očekivati veći obujam matematičke pričuve. Promatrano iz perspektive osiguranika bolja opcija je uložiti u osiguranje života u ranijim godinama životnog vijeka i na dulji rok jer iznos premije može biti prihvatljiviji uz istu osiguranu sumu.

Kao što se kod mirovina može procijeniti trajanje mirovinske rente slično se može odrediti i trenutak jednokratne premije i vremenski period plaćanja periodične premije.

Sukladno konceptu trajanja (konveksnosti) u slučaju generičkih fiksnih prihoda obveznice definira se ideja trajanja rente kao čimbenika trajanja životnih osiguranja. Kako je trajanje D mirovinskih renti negativna derivacija rente a_x, s obzirom na kamatnu stopu *p*, po samoj sebi može se izračunati trajanje neto jednokratne premije i neto periodične premije pomoću sljedećih međuovisnosti[21]:

$$\frac{\partial}{\partial\delta}A_x = \frac{\partial}{\partial\delta}(1-\delta a_x) = -\left(\delta\frac{\partial}{\partial\delta}a_x + a_x\right). \qquad (4.64)$$

Kako se trajanje mirovinskih renti definira kao

$$D_{renta} = -\frac{\frac{\partial}{\partial\delta}a_x}{a_x} \qquad (4.65)$$

slijedi jednakost

---

[19] Ćurković, M.: Ugovor o osiguranju osoba život-nezgoda-zdravstvo, Inženjerski biro d.d., Zagreb, 2009., str. 57.
[20] Ćurković, M., Ibidem, str. 58.
[21] Milevsky, M.,A., Ibidem, str. 157.

$$-D_{renta} \cdot a_x = \frac{\partial}{\partial\delta} a_x \tag{4.66}$$

Uvrštavajući u jednakost (4.57) dobiva se jednakost za određivanje trajanja osiguranja

$$D_{osiguranje} = -\frac{\frac{\partial}{\partial\delta} A_x}{A_x} = \frac{a_x}{A_x}(1-\delta D_{renta})\,. \tag{4.67}$$

Ova jednakost se može preformulirati pomoću jednakosti

$$\frac{\partial}{\partial\delta} A_x = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\delta} e^{-\delta t} f(t)dt = -\int_0^\infty t e^{-\delta t} f(t)dt \tag{4.68}$$

Pod pretpostavkom da je preostali životni vijek eksponencijalna funkcija vrijedi

$$A_x = 1 - \frac{\delta}{\delta+\mu} = \frac{\mu}{\delta+\mu}, \tag{4.69}$$

Ova jednakost se jednostavno derivira po δ pa vrijedi:

$$D_{osiguranja} = \frac{\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)}{\frac{\mu}{\mu+\delta}} = \frac{1}{\delta+\mu} \tag{4.70}$$

Modeli osiguranja renti su životna osiguranja koja su oblikom svojih isplata slična isplatama mirovina, a posebno su osjetljivi na trajanje osiguranja.

5. MATEMATIČKE ZAKONITOSTI U ŽIVOTNIM OSIGURANJIMA

Polazne osnove za matematičke zakonitosti životnih osiguranja su Zakon velikih brojeva, teorija vjerojatnosti i stohastički procesi. Dio matematike kojim se rješavaju i objašnjavaju računski problemi osiguranja je aktuarska matematika. Aktuarska matematika leži na istim principima kao i financijska matematika, a to je princip ekvivalencije svih uplata i isplata svedenih na isti vremenski trenutak. No, aktuarska matematika ipak se razlikuje od financijske matematike jer su zakonitosti matematike životnih osiguranja vezane i uvažavaju starost osoba koje ulaze u sustav osiguranja života, tj. uvažava zakonitosti stohastičkih procesa, a aplikativno i vremensku vrijednost novca.

Probleme prognoziranja i nastupa osiguranih događaja aktuarska matematika rješava koristeći Zakon velikih brojeva.

Ovaj zakon pomaže uočiti pravilnosti i zakonitosti u nastupanju promatranog događaja, a njegova suština je u promatranju velikog broja slučajeva i temeljem tih promatranja donosi se zaključak o pravilnosti u nastupanju jednog događaja. Ovaj zakon posebnim čini veliki broj promatranih slučajeva i što je broj promatranja veći, pravilnost bolje dolazi do izražaja, a odstupanja su manja. Promatrali se neki događaj pojedinačno on je slučajni događaj, a u velikom broju promatranja postaje zakonitost.

Osim prognoze nastupa osiguranog događaja bitno je znati i vjerojatnosti nastupa određenih osiguranih događaja pa se u tom segmentu aktuarska matematika oslanja na račun vjerojatnosti. Pomoću računa vjerojatnosti oblikuju se tablice smrtnosti i Komutativni brojevi o čemu je bilo riječi u trećem poglavlju. Određivanje vjerojatnosti pojavljivanja nekog štetnog događaja u životnim osiguranjima je temelj za određivanje premije osiguranja, što slijedi u nastavku ovog poglavlja.

5.1. Stohastički pristup obračunu neto premije u životnom osiguranju

Ovim pristupom se diskontirane vrijednosti uplata (isplata) koje su funkcija vremena izjednačavaju sa očekivanim vrijednostima koje su ovisne o vremenu i kamatnoj stopi. Vrijeme trajanja života je neprekidna funkcija, a preostalo vrijeme života osobe stare x-godina neprekidna slučajna varijabla *T(x)*. Za neprekidnu slučajnu varijablu očekivana vrijednost je jednaka određenom integralu:

$$E\left[f(t)\right]=\int_0^{\infty} f(t)g(t)dt \quad [22] \tag{5.1}$$

U stohastičkom modelu pretpostavka je da je diskontna kamatna stopa konstantna. To znači diskontni faktor nije slučajna varijabla. Definirajmo jedan indikator b_t na slijedeći način:

$b_t = 1$, ako osigurani rizik nastupi tijekom važenja ugovora

$b_t = 0$, ako osigurani rizik ne nestupi tijekom važenja ugovora

Neka je v_t diskontna osigurana suma za diskontni faktor *v*, koji je vezan za vrijeme *t*, tj. vrijeme od početka osiguranja do nastupa obveze osiguravatelja. Vrijedi slijedeće: $v_t = v^t$. Varijable b_t i v_t su varijable vremena i izravno uvjetuju slučajnu varijablu preostalo vrijem života x-godišnjaka - *T(x)*. Neka je nominalan vrijednost osigurane sume slučajna varijabla *Z*:

$$Z = z(t) = b_t \cdot v_t \tag{5.2}$$

Očekivana vrijednost diskontirane vrijednosti osigurane sume je $E(Z)$ jednokratna premija u osiguranju života.

5.1.1. Sadašnja vrijednost jednokratnih uplata neto premija

Radi li se o privremenom osiguranju kapitala za slučaj smrti obveza osiguravatelja je isplatiti korisniku osiguranja osiguranu sumu u slučaju smrti osiguranika u ugovorom definiranom roku. Odnosno, ako smrt nastupi prije isteka roka osiguravatelj ima obvezu isplate osigurane sume, u suprotnom nema. Neka je *n* oznaka za rok trajanja osiguranja pa je nominalna vrijednost osigurane sume jednaka:

$$Z = \begin{cases} v^t, T \le n \\ 0, T \succ n \end{cases} \quad \text{kada je} \quad b_t = \begin{cases} 1, t \le n \\ 0, t \succ n \end{cases} \quad \text{i} \quad v_t = v^t \tag{5.3}$$

Jednokratna neto premija n-godišnjeg osiguranja kapitala za slučaj smrti osobe stare *x* godina označava se sa $\ddot{A}_{x\overline{n}|}$ [23] i jednaka je očekivanju nominalne vrijednosti osigurane sume.

---

[22] Više pogledati u Pauše, Ž.: Vjerojatnost Informacija – Stohastički procesi, Školska knjiga, Zagreb, 2003. i Slud, E.V., Actuarial Mathematics and Life-Tables Statistics, Mathematics Department University of Maryland, College Park, 2006.

[23] Oznaka preuzeta iz Aktuarski modeli životnih osiguranja I. dio Osnove aktuarske matematike, dr.sc. Željko Šain

Funkcija $Z = z(t)$ je funkcija slučajne varijable $T(x)$ pa imamo:

$$\ddot{A}_{x\overline{n}|} = E(Z) = E(z_t) = \int_0^\infty z_t \cdot g(t)dt = \int_0^n v^t \; {}_t p_x \mu_{x+1} dt \tag{5.4}$$

Razdioba slučajne varijable Z u j-tom trenutku može se odrediti iz:

$$E(Z^j) = E(z_T) = \int_0^n (v^t)^j \; {}_t p_x \mu_{x+1} dt = \int_0^n e^{-(\delta j)t} \; {}_t p_x \mu_{x+t} dt \tag{5.5}$$

Iz prethodne jednakosti vidi se da je j-ti trenutak razdiobe Z jednak jednokratnoj premiji n-godišnjeg osiguranja u slučaju smrti za kamatnu stopu koja je j puta veća od δ, odnosno za dekurzivni faktor u neprekidnom ukamaćivanju $e^{-\delta \cdot j}$. Tvrdnja vrijedi i za ukamaćivanje uz efektivnu kamatnu stopu.

Varijanca kao mjera disperzije očekivane vrijednosti je:

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = {}^2\ddot{A}_{x\overline{n}|} - (\ddot{A}_{x\overline{n}|})^2 \tag{5.6}$$

gdje je ${}^2\ddot{A}_{x\overline{n}|}$ jednokratna neto premija za n-godišnji period računata za kamatnu stopu 2δ.

U slučaju doživotnog osiguranja kapitala obveza je osiguravatelja isplatiti osiguranu sumu osiguranim osobama po nastanku osiguranog slučaja. Pretpostavke ovog stohastičkog modela su:

$$\begin{aligned} b_t &= 1 & t &\geq 0 \\ v_t &= v^t & t &\geq 0 \\ Z &= v^t & T &\geq 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Jednokratna neto premija doživotnog osiguranja označava se sa $\ddot{A}_x$ i određuje se:

$$\ddot{A}_x = E(Z) = E(z_T) = \int_0^\infty z_t \cdot g(t)dt = \int_0^\infty v^t \; {}_t p_x \mu_{x+1} dt \tag{5.8}$$

Doživotno osiguranje traje do kraja života osigurane osobe pa broj godina trajanja osiguranja se smatra beskonačno velikim, odnosno $n \to \infty$. Iskustveno znamo da je malo osoba koje žive više od 100 godina, ali općenito granična vrijednost trajanja života, a time i osiguranja je beskonačna vrijednost. Ova pretpostavka ne mijenja značajno vrijednost jednokratne premije jer je:

$$\int_{100}^{\infty} v^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt \;\to 0. \tag{5.9}$$

Ako intenzitet smrtnosti μ_x promatramo kao konstantu μ uz određenu konstantnu kamatnu stopu $\delta = \frac{p}{100}$ jednokratna premija doživotnog osiguranja može se izraziti pomoću slijedeće jednakosti:

$$\ddot{A}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} \cdot \mu dt = \frac{\mu}{\mu + \delta}. \tag{5.10}$$

Kada je riječ o osiguranju kapitala za slučaj doživljenja osigurana suma se isplaćuje korisniku osiguranja u slučaju doživljenja starosne godine za koju je ugovor sklopljen.
Ovdje vrijedi slijedeće:

$$Z = \begin{cases} 0, T \le n \\ v^n, T \succ n \end{cases} \qquad \text{kada je } b_t = \begin{cases} 0, t \le n \\ 1, t \succ n \end{cases} \qquad \text{i} \qquad v_t = v^t, t \ge 0 \tag{5.11}$$

Jednokratna neto premija za slučaj doživljenja je:

$$A_{x\bar{n}|} = E(Z) = v^n \cdot {}_n p_x, \tag{5.12}$$

uz varijancu

$$Var(Z) = {}^2A_{x\bar{n}|} - (A_{x\bar{n}|})^2 = v^{2n} \cdot {}_n p_x \cdot {}_n q_x. \tag{5.13}$$

5.1.2. Sadašnja vrijednost višekratnih uplata neto premije

Neka se premije uplaćuju neprekidno sve do trenutka nastupanja osiguranog slučaja tada je očekivana sadašnja vrijednost svih uplata je

$$a_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt \tag{5.14}$$

Radi jednostavnosti neka su uplate jedinične i neka se uplaćuju tijekom *n* godina pa možemo pisati:

$$a_x = \int_0^n e^{-\delta t} dt. \tag{5.15}$$

Očekivanje stohastičke diskontirane sadašnje vrijednosti osigurane sume, u iznosu jedne novčane jedinice je dano sa:

$$A_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} f(t) dt \tag{5.16}$$

gdje je $f(t)$ funkcija gustoće vjerojatnosti za preostalo vrijeme je života slučajne varijable T_x. Veza između jednakosti (5.15) i (5.16) je prikazana slijedećom jednadžbom[24]:

$$A_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} f(t) dt = 1 - \delta a_x \tag{5.17}$$

Kada se osiguranje plaća višekratnim jednakim uplatama neto periodična premija se izračunavaju temeljem omjera,

$$NPP = \frac{A_x}{a_x} = \frac{1}{a_x} - \delta \tag{5.18}$$

5.1.3. Veza sadašnje vrijednosti premija i isplata osiguranog iznosa

Promatra li se osiguranje života u trenutku sklapanja ugovora sadašnja vrijednost osiguranog iznosa (naknade koja se očekuje od osiguravatelja za isplatit) je jednaka sadašnjoj vrijednosti premija koje se očekuju kao uplate osiguranika na račun osiguravatelja. Kako vrijeme prolazi vrijednost naknade raste, a vrijednost premija koje tek trebaju biti uplaćene pada. Osiguravatelj stoga mora držati u svom posjedu u svakom trenutku razliku sadašnje vrijednosti osiguranog iznosa i premije. Taj iznos se zove vrijednost police osiguranja ili pričuva.

Slučajno odabrani veliki broj osoba u dobi *x*, njih $\lambda \cdot l_x$ koje su kupile doživotno osiguranje za slučaj smrti i sve osobe neka uplaćuju godišnju premiju P_x . Neka osiguravatelj na sredstva u svom posjedu ostvaruje točno onu kamatnu stopu na temelju koje su premije obračunate (koja je ugrađena u komutativne brojeve). Nadalje, neka je smrtnost promatrane skupine točno u

[24] Milevsky, M.,A., Ibidem, str. 146.

skladu s odabranim tablicama smrtnosti – to znači korektnost tablica smrtnosti i λ dovoljno velik.

Rizik smrti je rastuća funkcija dok su premije konstantne. Posljedica je vidljiva na kraju godine *t* kada je akumulirani iznos uplaćenih premija veći od akumuliranog iznosa isplaćenih svota. Osiguravatelj dakle posjeduje određenu količinu novca koja se naziva ukupna neto premijska pričuva. Ukupna pričuva na kraju godine *t* podijeljena brojem polica koje su u tom trenutku aktivne zove se neto premijska pričuva po slučajno odabranoj polici[25].

Veza između sadašnjih vrijednosti premija i isplata osiguranog iznosa počiva na istoj logici bez obzira radili se o stohastičkim obračunima premije ili diskretnim statističkim obračunima. Osiguravatelji života od uplaćenih neto premija oblikuju matematičku pričuvu koju plasiraju na financijska tržišta i nastoje poboljšati strukturu svoga portfelja u smislu većeg obujma matematičke pričuve iz koje će u konačnici biti isplaćeni osigurani iznosi. Zato je jako bitno „točno" pretpostaviti kamatnu stopu, „točno" procijeniti vjerojatnosti smrtnosti funkcijom koja dobro opisuje ponašanje smrtnosti populacije koja je korisnik osiguranja i tim maksimalno smanjiti rizike pribave. Korektno procijenjene sadašnje vrijednosti premija potom uz „dobro" uloženu matematičku pričuvu jamstvo je koje će osigurati iznos koji premašuje osiguranu sumu, a time je povjerenje osiguranika očuvano i postojanje osiguravatelja opravdano.

5.1.4. Sadašnja vrijednost premija mješovitog osiguranja

Kada se radi o mješovitom osiguranju kapitala osiguravatelja ima obvezu isplate osigurane sume u slučaju smrti osiguranika prije isteka roka ili po isteku roka u slučaju doživljenja. To znači osiguravatelj ima obvezu isplate osigurane sume bezuvjetno. Jednokratna neto premija mješovitog osiguranja je suma jednokratne neto premije za slučaj smrti i za slučaj doživljenja. Vrijedi slijedeće:

$$Z_1 = \begin{cases} v^t, t \le n \\ 0, t \succ n \end{cases} \quad \text{i} \quad Z_2 = \begin{cases} 0, t \le n \\ v^n, t \succ n \end{cases} \quad \text{implicira} \quad Z = \begin{Bmatrix} v^t, t \le n \\ v^n, t \succ n \end{Bmatrix} \tag{5.19}$$

Jednokratna neto premija mješovitog osiguranja proizlazi iz $Z = Z_1 + Z_2$, odnosno

$$\overline{A}_{x\overline{n}|} = \ddot{A}_{x\overline{n}|} + A_{x\overline{n}|}. \tag{5.20}$$

Varijanca je:

[25] Bakić, D., Franciškovič, D., Financijska i aktuarska matematika, skripta, Osijek, 2013., str. 99.

$$Var(Z) = {}^{2}\overline{A}_{x\overline{n}|} - (\overline{A}_{x\overline{n}|})^2 \tag{5.21}$$

Stohastički model dopušta određivanje varijance za odabrane funkcije vezane za smrtnost, a varijanca je po definiciji odstupanje od očekivane vrijednosti i svakako jedna od mjera rizika. To znači mogućnost određivanja greške za izračunatu jednokratnu premiju. Pozitivna karakteristika stohastičkog modela je svakako minimizacija rizika, ali nije prihvatljiv za praktičnu primjenu.

5.2. Statistički pristup obračunu neto premija

Statistika i statističke metode u životnim osiguranjima su jedan od temeljnih stupova poslovanja, odnosno baza na kojoj se i pomoću koje se gradi poslovanje osiguravatelja života. Osiguravatelji stalno u svom poslovanju određuju svoje prihode od uplata i sumiraju obveze prema osiguranicima, a to bez statistike je nemoguće. Točnost pri određivanju kako premija, tako i obveza ovisi izravno i o točnosti statističkih podataka. Stoga često statistika u osiguranju biva definirana kao alat za evidenciju, statističko uređivanje i prikazivanje podataka. Za određivanje statističkih zakonitosti u osiguranju života neophodne su evidencije koje služe samo kao izvor podataka i zasigurno kvaliteta rezultata statističkih metoda ovisi o kvaliteti podataka. Kada je u pitanju statistika u osiguranju treba razlikovati onaj dio statistike koji ima za cilj prikupljanje, sistematiziranje podatka i kreiranje izvještaja o stanju u osiguranju za određeno razdoblje od statistike koja će rezultirati informacijama o mogućim rizicima koje osiguravatelj života preuzima. Odnosno za osiguravatelje života bitne su matematičko-statističke metode pomoću kojih će osiguravatelj odrediti novčane iznose koje će dobiti u vidu premija, a i one iznose koji ga obvezuju prema osiguraniku.

Temelj za kvalitetnu primjenu matematičko statističkih metoda pomoću kojih se procjenjuje rizik u osiguranju je svakako jaki informacijski sustav sa izgrađenom jedinstvenom bazom podataka. Za potrebe ovog rada i aktuarske analize naglasak je na neophodnosti postojanja jedinstvene baze podataka na kojoj je moguće statističko praćenje podataka tijekom dužeg niza godina kao i ažuriranje baze detaljnije prema potrebama svih korisnika.

Formiranje premije, odnosno matematičke pričuve specifično je radi prisutnosti rizika smrti koji je promjenjiv i progresivno raste s godinama starosti. Tu dolazi do izražaja statistički pristup obračuna neto premija. Osnova za statistički izračun neto premija je princip ekvivalencije u sadašnjem trenutku osiguranja, odnosno u trenutku definiranja svih parametara odabranog modela osiguranja.

5.2.1. Sadašnja vrijednost jednokratnih uplata neto premija

U ovom dijelu rada bit će opisan postupak određivanja sadašnje vrijednosti jednokratnih uplata neto premije za nekoliko vrsta životnih osiguranja. Slijedi analiza jednokratne neto premije osiguranja *za slučaj smrti*. Neka se osigurani kapital K isplaćuje korisnicima osiguranja krajem godine u kojoj nastupi osigurani slučaj ako se osigurani slučaj dogodio u roku od n godina. Neka je dalje osiguranik u trenutku zaključenja ugovora o osiguranju star x godina. Ako je sa $\ddot{A}_{x\overline{n}|}$ označena jednokratna neto premija za jednu novčanu jedinicu osigurane sume tada osiguravatelj od l_x osoba prima uplate u iznosu $l_x \cdot \ddot{A}_{x\overline{n}|}$.

Ako u tijeku prve promatrane godine (odnosno u tijeku $x+1$-ve godine) umre d_x osoba, do kraja $x+2$. godine d_{x+1} osoba itd. do kraja $x+n$-te godine kada umre d_{x+n-1} osoba, osiguravatelj ima obvezu isplate, za svaku od tih osoba, po jednu novčanu jedinicu za jednu novčanu jedinicu osigurane sume. Vrijednost uplata mora u svakom trenutku biti jednaka vrijednosti svih isplata svedenih na isti trenutak vrijedi:

$$l_x \cdot \ddot{A}_{x\overline{n}|} = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{r^n} \tag{5.22}$$

ako se cijela jednakost podijeli sa r^x slijedi:

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot \ddot{A}_{x\overline{n}|} = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \frac{d_{x+2}}{r^{x+3}} + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{r^{x+n}} \tag{5.23}$$

Omjer $\frac{l_x}{r^x}$ je diskontirani broj živih osoba starih x godina i označava se sa D_x.

Omjer $\frac{d_x}{r^{x+1}}$ je diskontirani broj osoba umrlih u $x+1$-voj godini o označava se sa C_x.

Uz ove oznake

$$\Rightarrow \qquad D_x \cdot \ddot{A}_{x\overline{n}|} = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1} \tag{5.24}$$

Suma svih diskontiranih brojeva umrlih osoba počevši od onih koji su umrli u svojoj $x+1$-voj godini pa nadalje je:

$$C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_{x+n-1} + \ldots = M_x \tag{5.25}$$

i $$C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + ... = M_{x+n} \tag{5.26}$$

vrijedi:

$$D_x \cdot \ddot{A}_{x\bar{n}|} = M_x - M_{x+n} \tag{5.27}$$

pa je jednokratna neto premija za jednu novčanu jedinicu osiguranja

$$\ddot{A}_{x\bar{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \tag{5.28}$$

Konačno jednokratna neto premija životnog osiguranja za osiguranu sumu od K novčanih jedinica je:

$$M = K \cdot \ddot{A}_{x\bar{n}|} = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \tag{5.29}$$

U slučaju doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti pretpostavimo kao i prethodno da se osigurani kapital K isplaćuje korisnicima osiguranja krajem godine u kojoj je nastupio osigurani slučaj. Osiguranik je u trenutku sklapanja ugovora o osiguranju star *x* godina. Ako sa $\ddot{A}_x$ označimo jednokratnu neto premiju za jednu novčanu jedinicu osigurane sume tada će osiguravatelj primati od l_x osoba uplate iznosa $l_x \cdot \ddot{A}_x$.

Međutim, ako tijekom prve godine osiguranja umre d_x osoba, zatim do kraja druge godine umre d_{x+1} osoba, itd. osiguravatelj ima obvezu, za svaku od tih osoba, isplatiti po jednu novčanu jedinicu za jednu novčanu jedinicu osigurane sume. Diskontirana vrijednost isplata mora biti jednaka vrijednosti uplata pa vrijedi:

$$l_x \cdot \ddot{A}_x = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + ... \tag{5.30}$$

Odnosno dijeljenjem sa r^x slijedi

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot \ddot{A}_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \frac{d_{x+2}}{r^{x+3}} + ... \tag{5.31}$$

Dalje vrijedi:

$$D_x \cdot \ddot{A}_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... = M_x \tag{5.32}$$

Pa je jednokratna neto premija za jednu novčanu jedinicu osigurane sume jednaka

$$\ddot{A}_x = \frac{M_x}{D_x}, \tag{5.33}$$

a jednokratna neto premija za osiguranu sumu od K novčanih jedinica jednaka je:

$$M = K \cdot \ddot{A}_x = K \cdot \frac{M_x}{D_x}. \tag{5.34}$$

Slijedi analiza sadašnje vrijednosti jednokratne neto premije osiguranja kapitala *za slučaj doživljenja.*

U tom slučaju osiguravatelj sklapa ugovor sa osobom koja je u tom trenutku stara x godina i prema njoj ima obvezu isplate osigurane sume iznosa K. Označimo jednokratnu neto premiju koja odgovara jednoj novčanoj jedinici osigurane sume sa $A_{x\overline{n}|}$. Ekvivalentno prethodnim primjerima lako je zaključiti da će osiguravatelj od l_x osoba starih x godina primati $l_x \cdot A_{x\overline{n}|}$ novčanih jedinica. Vrijednost uplata treba biti ekvivalentna diskontiranoj vrijednosti isplata pa vrijedi:

$$l_x \cdot A_{x\overline{n}|} = \frac{l_{x+n}}{r^n}, \tag{5.35}$$

Odnosno vrijedi dalje:

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot A_{x\overline{n}|} = \frac{l_{x+n}}{r^{x+n}}. \tag{5.36}$$

Vrijedi dalje:

$$D_x \cdot A_{x\overline{n}|} = D_{x+n}. \tag{5.37}$$

Slijedi zaključak jednokratna neto premija za jednu novčanu jedinicu je

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{5.38}$$

pa je jednokratna neto premija a osiguranu sumu od K novčanih jedinica je

$$M = K \cdot A_{x\overline{n}|} = K \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{5.39}$$

Iznosi obračunatih tarifa dobivenih stohastičkim ili statističkim metodama se razlikuju. Prednost obračuna stohastičkim metodama je u tome što se rasipanje može procijeniti, ali je prisutan rizik izbora metode obračuna i nepraktični su obračuni stohastičkim metodama. Prednost statističkih metoda je u praktičnoj provedbi računa prilikom obračuna neto tarifa životnog osiguranja.

5.2.2. Sadašnja vrijednost višekratnih uplata neto premija

Za izračunavanje sadašnje vrijednosti višekratnih uplata neto premija također vrijedni princip ekvivalencije svih uplata i isplata.

Neka je $P(\ddot{A}_x)$ iznos doživotne godišnje neto premije za jednu novčanu jedinicu osigurane sume kod doživotnog osiguranja za slučaj smrti.

Svedemo li sve uplate i isplate osiguravatelja na sadašnji trenutak i uvažavajući pri tome ekvivalentnost tih sadašnjih vrijednosti vrijedi slijedeća jednakost:

$$l_x P(\ddot{A}_x) + \frac{l_{x+1}P(\ddot{A}_x)}{r} + \frac{l_{x+2}P(\ddot{A}_x)}{r^2} + \ldots = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + \ldots \qquad (5.40)$$

Ako cijelu jednakost podijelimo sa r^x dobije se:

$$P(\ddot{A}_x)\left(\frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \ldots\right) = \frac{d_x}{r^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} + \frac{d_{x+2}}{r^{x+3}} + \ldots \qquad (5.41)$$

Odnosno

$$P(\ddot{A}_x)\left(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots\right) = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots \qquad (5.42)$$

Ili

$$P(\ddot{A}_x) N_x = M_x \qquad (5.43)$$

Iz prethodne jednakost dobiva se godišnja doživotna premija:

$$P(\ddot{A}_x) = \frac{M_x}{N_x}. \qquad (5.44)$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa D_x dobiva se:

$$P(\ddot{A}_x) = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_x}} = \frac{\ddot{A}_x}{A_x} \qquad (5.45)$$

Pomoću dobivene jednakosti računa se godišnja neto doživotna premija kao omjer jednokratne premije osiguranja za koje računamo premije i jednokratne premije za neposrednu doživotnu rentu.
Mijenjajući odnosno prilagođavajući brojnik i nazivnik vrsti osiguranja dobiva se iznos godišnje neto premije za određenu vrstu osiguranja ali uz pretpostavku primjene istih tablica smrtnosti za brojnik i nazivnik.

Primjenom prethodne zakonitosti na osiguranje kapitala za slučaj doživljenja godišnja neto premija koja se plaća cijelo vrijeme trajanja osiguranja je:

$$P(A_{x\bar{n}|}) = \frac{A_{x\bar{n}|}}{A_{xn}} = \frac{\dfrac{D_{x+n}}{D_x}}{\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{5.46}$$

Ako je izbor mješovito osiguranje kapitala u tom slučaju godišnja premija, koja se plaća *n* godina za jednu novčanu jedinicu osigurane sume je:

$$P(\overline{A}_{x\bar{n}|}) = \frac{\overline{A}_{x\bar{n}|}}{\overline{A}_{xn}} = \frac{\dfrac{M_x + M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}{\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{M_x + M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{5.47}$$

Slično se može napisati i za druge oblike osiguranja.

5.2.3. Veza sadašnje vrijednosti premija i isplata osiguranog iznosa

Sadašnja vrijednost premija za svakog osiguravatelja života znači iznos uplata s kojima će osiguravatelj tijekom trajanja osiguranja raspolagati u smislu povećanja obujma naplaćenih sredstava kako bi u svakom trenutku bila osigurana solventnost osiguravatelja.
Pri izračunu sadašnjih vrijednosti premija u bilo kojem obliku polazna pretpostavka je da će naplaćene premije biti dovoljne za pokriće svih obveza vezanih za odabrani model osiguranja. Ako osiguranici umiru prema vjerojatnosti u tablicama smrtnosti koje koristi osiguravatelj pri obračunu neto premija sa određenom kamatnom stopom koja određuje komutativne brojeve obračunata premija će biti dovoljna za pokriće obveza iz osiguranja. Osiguravatelji života su

obvezni od naplaćenih premija oblikovati matematičku pričuvu kojoj će ulaganjem uz određenu kamatnu stopu povećati obujam.
Uz plaćanje prirodne premije osiguravatelji bi za svaku godinu osiguranja imali uplata u iznosu isplata za nastale osigurane slučajeve u odabranoj godini.
Kod osiguranja života prirodne premije su nepraktične i neprihvatljive jer rastu sa starosti osiguranika pa u kasnijim starosnim godinama dosežu vrijednosti koje osiguranici ne mogu plaćati. Zato u praksi životna osiguranja sa uplatama prirodnih premija se ne koriste. Kao rješenje koristi se prosječna premija. Njena prednost u odnosu na prirodnu premiju je u dužini trajanja životnih osiguranja.
Prosječne premije u prvim godinama osiguranja su veće od prirodne premije pa se ukupan iznos uplata od prosječnih premija, u prvim godinama osiguranja, ne troši u cijelom iznosu nego samo jedan dio. Taj nepotrošeni dio u godinama, počevši od prve godine osiguranja u kojoj je najveći, oblikuje matematičku pričuvu. U kasnijim godinama prihod od premija nije dovoljan za pokriće obveza pa ih osiguravatelj pokriva iz oblikovane matematičke pričuve iz prethodnih godina osiguranja. Aktuarskim metodama izračunate premije oblikuju matematičku pričuvu koja se kroz određene plasmane prvenstveno na financijskom tržištu, ali i na tržištu realnih dobara oblikuje u većem obujmu i kao takva postaje dostatna za podmirivanje svih obveza prema osiguranicima.
Imperativ svakog osiguravatelja je postizanje što većeg obujma matematičke pričuve, a na tom putu treba identificirati, kontrolirati i upravljati većim brojem poslovnih rizika.

5.2.4. Sadašnja vrijednost premija mješovitog osiguranja

Mješovito osiguranje kapitala predstavlja kombinaciju osiguranja kapitala za slučaj doživljenja ili za slučaj smrti osigurane osobe. Jasno je kako tada jednokratna neto premija za jednu novčanu jedinicu osigurane sume, u oznaci $\overline{A}_{x\overline{n}|}$, odgovara sumi odgovarajućih vrijednosti osiguranja u slučaju smrti osigurane osobe ili za slučaj doživljenja godina $x+n$. Odnosno vrijedi:

$$\overline{A}_{x\overline{n}|} = \ddot{A}_{x\overline{n}|} + A_{x\overline{n}|} \tag{5.48}$$

Dalje vrijedi:

$$\overline{A}_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{5.49}$$

Za osiguranu sumu u iznosu K novčanih jedinica jednokratna neto premija ima iznos:

$$M = K \cdot \bar{A}_{x\bar{n}|} = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \tag{5.50}$$

5.3. Komutativni brojevi u obračunu premija u životnim osiguranjima

Stohastički model izračunavanja neto premije nekih životnih osiguranja nije pogodan za praktičnu primjenu. Stoga se u praksi, za određivanje neto premije, koriste jednostavniji statistički obračuni pomoću brojeva koji povezuju vjerojatnost smrti i kamatnu stopu. Ti brojevi su komutativni brojevi. Komutativni brojevi imaju karakter pomoćnih brojeva koji se dobivaju odgovarajućim izračunima i pridružuju osnovnim parametrima tablica smrtnosti: broju živih i umrlih osoba po životnoj dobi.

Temeljni, polazni komutativni brojevi za žive osobe D_x i umrle osobe C_x rezultat su proizvoda jedne stohastičke veličine (utvrđenog broja živih odnosno umrlih osoba) i predviđene (projicirane, prognozirane, planirane) kamatne stope.[26]

Osnovni komutativni brojevi koji se koriste u osiguranju života su:

a) za žive osobe

$D_x -$ diskontirani broj živih osoba starih *x* godina

$$D_x = \frac{l_x}{r^x} = v^x \cdot l_x \tag{5.51}$$

$N_x -$ suma diskontiranih brojeva živih osoba počevši od starosti *x* do najdublje starosti ω

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_\omega \tag{5.52}$$

općenitije

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots \tag{5.53}$$

ili u kraćem zapisu:

$$N_x = \sum_{k=x}^{\omega} D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} \tag{5.54}$$

[26] Ž. Šain: Aktuarski modeli živtnih osiguranja I dio, Sarajevo, 2009. str. 43.,44.

$\Rightarrow \qquad D_x = N_x - N_{x+1}$ (5.55)

S_x – suma sume diskontiranih brojeva živih osoba počevši od starosti x do najdublje starosti ω

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + ... + N_\omega \tag{5.56}$$

općenitije

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + ... \tag{5.57}$$

Odnosno pomoću suma zapis ima oblik

$$S_x = \sum_{k=x}^{\omega} N_k = \sum_{k=0}^{\infty} N_{x+k} \tag{5.58}$$

$\Rightarrow \qquad N_x = S_x - S_{x+1}$ (5.59)

b) za umrle osobe

C_x – diskontirani broj umrlih osoba tijekom $x+1$-e godine starosti

$$C_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} = v^{x+1} \cdot d_x = D_x \cdot v \cdot q_x \tag{5.60}$$

M_x – suma diskontiranih umrlih osoba počevši od onih koje su umrli u svojoj $x+1$-oj godini (do najdublje starosti ω) je

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + ... + C_{x+\omega} \tag{5.61}$$

Odnosno

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + ... \tag{5.62}$$

$$M_x = \sum_{k=x}^{\omega-1} C_k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} \tag{5.63}$$

$\Rightarrow \qquad C_x = M_x - M_{x+1}$ (5.64)

R_x – suma sume diskontiranih brojeva umrlih osoba počevši od onih osoba koje su umrle u $x+1$-oj godini starosti je

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + ... + M_{\omega-1} \tag{5.65}$$

odnosno

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + ... \tag{5.66}$$

$$R_x = \sum_{k=x}^{\omega-1} M_k = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\cdot C_{x+k} \tag{5.67}$$

$$\Rightarrow \qquad M_x = R_x - R_{x+1} \tag{5.68}$$

Između komutativnih brojeva za žive osobe i komutativnih brojeva za umrle osobe postoji povezanost. Osnovne veze bit će prikazane u nastavku.

- Odnosi između C_x i D_x

$$C_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} = \frac{l_x - l_{x+1}}{r^{x+1}} = \frac{l_x}{r^{x+1}} - \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} = \frac{1}{r}\cdot\frac{l_x}{r^x} - \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} = \frac{1}{r}D_x - D_{x+1} = v\cdot D_x - D_{x+1} \tag{5.69}$$

$$\Rightarrow \qquad C_x = v\cdot D_x - D_{x+1} \tag{5.70}$$

- Odnos između D_x, M_x i N_x

Koristeći jednakosti

$$D_x = N_x - N_{x+1} \tag{5.71}$$

$$M_x = v\cdot N_x - N_{x+1} \tag{5.72}$$

dobiva se:

$$M_x = v\cdot N_x - (N_x - D_x) = v\cdot N_x - N_x + D_x \tag{5.73}$$

$$M_x = (v-1)\cdot N_x + D_x \tag{5.74}$$

za $\qquad d = 1 - v$

$$\Rightarrow \qquad M_x = D_x - d\cdot N_x \tag{5.75}$$

- Odnos između N_x, S_x i R_x

Koristeći jednakosti

$$N_x = S_x - S_{x+1} \tag{5.76}$$

$$R_x = v\cdot S_x - S_{x+1} \tag{5.77}$$

Dobiva se

$$R_x = v\cdot S_x - (S_x - N_x) = v\cdot S_x - S_x + N_x \tag{5.78}$$

$$R_x = (v-1)\cdot S_x + N_x \tag{5.79}$$

za $\qquad d = 1 - v$

$$\Rightarrow \qquad R_x = N_x - d\cdot S_x. \tag{5.80}$$

Tablice smrtnosti najčešće počinju sa starosti 0 godina i idu do starosti 100 godina uz pretpostavku stalnosti smrtnosti tijekom tih 100 godina, što ne odgovara stvarnosti. Rast životnog standarda utječe na produljenje životnog vijeka, ratovi i razne bolesti na svoj način utječu na povećanje smrtnosti i time mijenjaju vjerojatnost smrtnosti. Sve to zajedno određuje neophodnost mijenjanja tablica smrtnosti nakon nekog vremena i njihovog nadopunjavanja novim svježim podacima.

5.4. Oblikovanje matematičke pričuve

Osnovna funkcija osiguranja ima zadaću osigurati naknadu štete ili isplatu osigurane sume osiguranicima, odnosno korisnicima osiguranja u visini koja je određena ugovorom o osiguranju. Za definiranje ovakvog područja definiranosti funkcije osiguranja osiguravatelji moraju na temelju uplaćenih premija osigurati dovoljno sredstava kako bi u svakom trenutku mogli odgovoriti na zahtjeve svojih osiguranika. S druge, pak strane za održavanje karakteristika ove funkcije osiguravatelji trebaju adekvatno odrediti visinu premije i pri tome stalno imati osiguranu likvidnost. Obračun premija je osnovni zadatak aktuarske matematike.[27]

Računski temelj za određivanje visine premije u životnom osiguranju su:

- tablice smrtnosti
- kamatna stopa i
- dodatak na premiju.

Tablice smrtnosti sumiraju funkcije vezane uz raspodjelu očekivanih vrijednosti dužine trajanja života i iz njih izvedenih funkcija. Koriste se u različitim područjima znanosti, a aktuari ih koriste za kreiranje matematičkih modela u osiguranju. Dati ocjenu tablica smrtnosti a time i rizika koji iz njih proizlazi pri formiranju premija znači definirati način na koji se one definiraju. Oblikovanje tablica smrtnosti temelji se na:

- matematičkoj utemeljenosti funkcija koje opisuju smrtnost kroz vjerojatnosno-statistički pristup
- načinima kreiranja tablica smrtnosti koji se koriste u praksi kroz determinističko-stohastički pristup

[27] Aktuarska matematika je dio primijenjene matematike koja se bavi matematičkim osnovama osiguranja.

- analitičkom pristupu formiranja tablica
- izravnavanju tablica smrtnosti kao načinu uklanjanja grešaka koje se javljaju pri njihovom oblikovanju.

Kamatna stopa je vezana za volatilnosti prvenstveno na financijskim tržištima, ali i drugim tržištima, tako što veća kamatna stopa plasmana sredstava utječe na smanjenje cijene osiguranja, ali i precijenjena kamatna stopa može ugroziti solventnost osiguratelja. Ako se odabrana kamatna stopa ne ostvari, osiguratelj će osjetiti financijski gubitak radi neostvarene kamate koja je primijenjena za oblikovanje premije.

Naime vrijednost financijskih kapaciteta u sadašnjem trenutku različita je od njihove vrijednosti u nekom budućem trenutku. Drugim riječima jedan od temeljnih zadataka identificiranja samog utjecaja rizika i njegovog upravljanja leži upravo u određivanju financijske vrijednosti osigurateljevih financijskih kapaciteta u danom vremenskom trenutku.

Ono što opterećuje osiguratelje jeste rizik vezan za vrijeme i to sa aspekta oblikovanja sredstava ali i sa aspekta njihovog plasmana na financijskom tržištu. Društvo za osiguranje oblikuje svoje financijske kapacitete kroz premije, periodične uplate osiguranika kroz duži vremenski period. Utjecaj vremena je intenzivniji kod životnih osiguranja jer su životna osiguranja vezana za tržišne uvjete duži vremenski period (doživotno osiguranje, osiguranje za slučaj doživljenja, mješovita osiguranja se vežu obično za 5, 10, 15 ili 20 godina,…). Premija je stalan novčani iznos, a vrijednost novca se sa protokom vremena mijenja to implicira zaključak kako se stvarna vrijednost premije također mijenja. Drugim riječima kamatna stopa izravno predstavlja temelj oblikovanja i obračuna premije i trebala bi, kod životnih osiguranja, biti nepromjenjiva ili se, pak, mijenjati matematičkom zakonitošću tijekom dužeg vremenskog perioda. Ako je kamatna stopa varijabilnija tijekom vremena, izloženost riziku je veća.

Stoga i u ovom segmentu životnih osiguranja matematičko-financijski modeli su od krucijalne važnosti i ne samo oni nego i matematički modeli stohastičkih procesa.

Dodatak na premiju je drugim riječima dodatak za pokriće troškova poslovanja iz kojeg društvo za osiguranje pokriva sve troškove poslovanja, obveze prema društvenoj zajednici, a ostvaruje se i odgovarajući financijski rezultat.[28]

Strukturu troškova poslovanja društva za osiguranje čini više različitih troškova koji se mogu podijeliti na različite načine ovisno od autora i pristupa analizi troškova. Najčešća podjela je prema pojedinim fazama pružanja usluge osiguranja u kojima oni nastaju. Sukladno tome razlikuju se:

- troškovi pribave osiguranja ili akvizicijski troškovi,
- troškovi koji nastaju za vrijeme trajanja osiguranja, odnosno administrativni troškovi i
- troškovi vezani za likvidaciju šteta i isplatu naknade.[29]

Troškovi pribave su troškovi koji nastaju prije i tijekom sklapanja ugovora o osiguranju. Visina tih troškova najčešće je na neki način vezana za premiju osiguranja iz sklopljenog ugovora.

Troškovi koji nastaju za vrijeme trajanja osiguranja su troškovi koji su vezani za vrijeme i načine prikupljanja premija osiguranja i operativnog rada društva za osiguranje, te kao takvi vezani su i za nastale rizike tijekom spomenutog vremena, a i za investicije.

Troškove vezane za likvidaciju šteta čine svi troškovi koji se događaju prilikom likvidacije šteta.

Troškovi osiguranja zauzimaju posebno mjesto u životnim osiguranjima iz jednostavnog razloga dužine trajanja ovih vrsta osiguranja i načina njihove pribave. Neprikladni visoki troškovi osiguranja mogu značajno utjecati na visinu premije, što implicira moguću nekonkurentnost društva za osiguranje. To je dovoljan razlog za nastojanje smanjenja troškova za osiguranje što je moguće više. Pri tome osiguravatelj mora imati na umu i postojanje rizika da se i neadekvatno niskim obračunom troškova može ugroziti likvidnost poslovanja.

[28] Šain, Ž.: Aktuarski modeli životnih osiguranja, I.dio, Osnove aktuarske matematike, Ekonomski fakultete u Sarajevu, Sarajevo, 2009. godine, str. 257.
[29] Ćurković, M., Jakovčević, D., Ibidem, str. 226.

5.4.1. Matematička pričuva i novčani tijekovi

Matematičku pričuvu i sadašnju vrijednost police životnog osiguranja osiguravatelj je dužan odrediti na godišnjoj razini. To je nužno jer svaki osiguravatelj mora konstantno imati osiguranu tu vrijednost. Matematička pričuva je važna za osiguravatelja jer je cilj osigurati podmirenje svojih obveza prema osiguranicima u svakom trenutku.

Svaki osiguravatelj života izložen je primanjima uplata premija i isplatama obveza tijekom vremena. Sva ova kretanja uplata i isplata su novčani tijekovi izravno vezani za matematičku pričuvu životnih osiguranja.

Osnovno pravilo na kojem se temelji veza matematičke pričuve i novčanih tijekova osiguravatelja je u poštivanju jednakosti između iznosa matematičke pričuve i razlike obveza osiguravatelja i obveza osiguranika u svakom vremenskom trenutku. Drugim riječima, matematičku pričuvu određuju obveze osiguravatelja i obveze osiguranika. Zato je potrebno sve novčane tijekove od uplata osiguranika i isplate osiguravatelja svesti na vrijednost u određenom vremenskom trenutku u kojem želimo oblikovati matematičku pričuvu.

Dakle, osiguravatelj oblikuje matematičku pričuvu prema sadašnjoj vrijednosti svih budućih obveza društva za osiguranje, izračunate na temelju zaključenih ugovora o osiguranju i umanjene za sadašnju vrijednost budućih premija koje će biti uplaćene na temelju ugovorenih modela osiguranja. Svaki osiguravatelj života dužan je ulagati sredstava za pokriće matematičke pričuve i njome sigurno upravljati odvojeno od ostalih svojih novčanih tijekova. Vrijednost imovine za pokriće matematičke pričuve u svakom trenutku mora biti najmanje jednaka visini sredstava dostatnih za pokriće iznosa koje obuhvaća matematička pričuva. Slobodna novčana sredstva trebaju biti uložena s ciljem minimiziranja rizika koji prati uložena sredstva i novčane tijekove.

Vrijednosti novčanih tijekova se razlikuju prema tome radi li se o diskretnim ili stohastičkim novčanim tijekovima.[30]

Ako je A deterministički tok i $t \in R$, tada je:

1. vrijednost novčanog tijeka u vremenu t je dana sa

$$V(t, A) = \frac{1}{v(t)} \int_0^{\infty} v(\tau) \cdot dA(\tau) \tag{5.81}$$

[30] Više u Koller, M.: Stochastic Models in Life Insurance, European Actuarial Academi, Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012., str., 29.-42.

2. vrijednost budućeg novčanog tijeka je

$$V^{+}(t,A)=V(t,A\times\chi_{[t,\infty]}), \tag{5.82}$$

pri čemu je $A\times\chi_{[t,\infty]}$ omeđena funkcija varijacija i $v(t)=e^{-\int_0^t \delta(\tau)d\tau}$ je funkcija definirana pomoću diskontne kamatne stope.

Stohastički novčani tijek može se definirati pomoću definicije kako slijedi.

Neka je $(A_t)_{t\in T}$ proces određen varijacijama na prostoru (Ω,A,P) i $F:R\times\Omega\to R$ omeđena funkcija. Uz navedene opise vrijedi jednakost

$$(F\cdot A)_{t(\omega)}=\int_0^t F(\tau,\omega)\cdot dA_\tau(\omega). \tag{5.83}$$

Stohastički novčani tijekovi polica osiguranja definiraju se sa

$$\begin{aligned} dA_{ij}(t,\omega)&=a_{ij}(t)dN_{ij}(t,\omega)\\ dA_i(t,\omega)&=I_i(t,\omega)da_i(t)\\ dA&=\sum_{i\in S}dA_i+\sum_{(i,j)\in S\times S,i\neq j}dA_{ij}\end{aligned} \tag{5.84}$$

Vrijednost $A_{ij}(t,\omega)$ je suma slučajnih novčanih tijekova određenih prijelazima iz stanja *i* u stanje *j* do trenutka *t*. Slično, $A_i(t,\omega)$ predstavlja sumu slučajnih novčanih tijekova do trenutka *t* u stanju *i*. Funkcije $a_{ij}(t)$ i $a_i(t)$ su funkcije isplata.

5.4.2. Metode oblikovanja matematičke pričuve

U sustavu životnih osiguranja matematička pričuva ima posebno važnu ulogu. Razlog tome je jednostavan i leži u svojstvu konstantnosti priliva premije životnih osiguranja. Naime, premija životnog osiguranja konstantna je ili primjereno matematički varijabilna tijekom cijelog trajanja osiguranja, a rizik smrtnosti, odnosno rizik dospijeća naplate osigurane sume s vremenom raste. Stoga premija koju plaća osiguranik nije prirodna premija nego izračunata premija u zavisnosti od modela i submodela životnog osiguranja. Izračunata prosječna premija je u prvom dijelu trajanja osiguranja veća od prirodne, ali u drugom dijelu njena vrijednost je manja od prirodne premije. To je osiguravateljima života dovoljan razlog za formiranje fonda matematičke pričuve.

Specifičnosti radi, s jedne strane i važnost s druge strane, matematička pričuva je pod posebnom brigom osiguravatelja života. Sredstva matematičke pričuve vode se na posebnom računu i pažljivo se plasiraju prvenstveno na financijskom tržištu s ciljem zadržavanja realne vrijednosti s mogućnošću povećanja obujma, dok sredstva matematičke pričuve nikako ne smiju biti izložena špekulacijama. Matematička pričuva mora biti pažljivo određena matematičkim modelima pomoću tablica smrtnosti i kamatne stope.

Matematička pričuva zauzima najveći dio u pasivi bilance osiguravatelja života. Društva za osiguranje obvezna su oblikovati matematičku pričuvu za sve dugoročne ugovore o osiguranju osoba kod kojih se kumuliraju sredstva štednje ili sredstva za pokriće povećanih rizika u kasnijim godinama osiguranja.[31]

Postoji više različitih metoda za oblikovanje (obračun) matematičke pričuve, a izbor metode ovisi o vrstama osiguranja koja se nalaze u portfelju osiguravatelja. Metode obračuna matematičke pričuve dijele se na individualne i grupne metode. Sve metode obračuna mogu koristiti neto premiju ili bruto premiju. Ako se pri obračunu koriste iznosi neto premije radi se o neto sustavu obračuna matematičke pričuve. Slično ako se pri obračunu koriste iznosi bruto premije govori se o bruto sustavu obračuna. U ovom radu će biti obrađen neto sustav obračuna matematičke pričuve.

Metode za individualni obračun matematičke pričuve su:

(i) Retrospektivna,
(ii) Prospektivna,
(iii) Knjigovodstvena metoda.

Grupne metode obračuna matematičke pričuve opisuju načine obračuna matematičke pričuve za definirane grupe životnih osiguranja na odgovarajući način s ciljem smanjenja broja računskih operacija. Cilj je dakle, račun pojednostaviti ali uz odgovarajuću točnost konačnog rezultata. Grupne metode daju rezultate, ako ne u potpunosti točne, onda bar približne onim koji se dobiju kod individualnog obračuna.

Grupne metode se dijele na one u užem smislu i njihovi rezultati su jednaki rezultatima individualnih metoda i na one u širem smislu čiji rezultati nisu jednaki rezultatima individualnih metoda, ali su razlike neznatne.

[31] M. Ćurak, D. Jakovčević: Osiguranje i rizici, RRIF, Zagreb, 2007., str. 265

Najpoznatije grupne metode u užem smislu su:

1. Karup-ova metoda
2. Altenburger-ova metoda (metoda pomoćnih brojeva)
3. Whiting-ova metoda
4. Fouret-ova metoda

Grupne metode u širem smislu su:

1. Lindstone-ova Z-metoda

   "t" metoda.[32]

Retrospektivna metoda obračunava matematičku pričuvu temeljem podataka iz proteklog vremena od dana osiguranja do dana računanja matematičke pričuve. Definira se kao razlika između svih akumuliranih uplata (U_d) osiguranika i svih dosadašnjih isplata (I_d) osiguravatelja promatrano sve u vremenskom trenutku obračuna matematičke pričuve. Dakle vrijedi jednakost

$$ {}_tV_x = U_d - I_d \tag{5.85}$$

Obračun premije prema ovoj metodi bit će prikazan na primjeru doživotnog osiguranja za slučaj smrti sa doživotnim plaćanjem premije u jednakim godišnjim iznosima i to za osiguranika koji je imao x godina starosti pri sklapanju ugovora.

Neka je neto premija za opisani primjer iznosa P.

Vrijednost svih neto premija dospjelih tijekom t godina na dan sklapanja ugovora (početak osiguranja) je:

$$P \cdot \frac{N_x}{D_x} \tag{5.86}$$

Vrijednost svih isplata na početku osiguranja jednaka je:

$$K \cdot \frac{M_x}{D_x} \tag{5.87}$$

Navedene dvije vrijednosti na početku osiguranja trebaju bit jednake pa vrijedi jednakost

$$P \cdot \frac{N_x}{D_x} = K \cdot \frac{M_x}{D_x} \tag{5.88}$$

$$\Rightarrow \qquad P \cdot N_x = K \cdot M_x . \tag{5.89}$$

[32] Ž. Šain: Aktuarski modeli živtnih osiguranja II dio, Ekonomski fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 2010. str.131-140.

Slijedi: matematička pričuva u trenutku t predstavlja razliku sadašnje vrijednosti svih uplaćenih neto premija i sadašnje vrijednost svih isplaćenih iznosa.

$$ {}_tV_x = P\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{D_{x+t}} - K\cdot\frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}\frac{D_x}{D_{x+t}} \tag{5.90}$$

$$ {}_tV_x = \frac{P\,(N_x - N_{x+t}) - K\cdot(M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}}. \tag{5.91}$$

Pomoću ove jednakosti može se obračunati matematička pričuva i za slijedeće vrste osiguranja: mješovita osiguranja i temporalna osiguranja. Ovaj model obračuna matematičke pričuve može se koristiti i za ostala životna osiguranja osim za osiguranje kapitala na stalan rok. Kod ostalih životnih osiguranja treba biti pažljiv sa vremenskim terminima uplata, isplata i terminom obračuna.

Prospektivna metoda obračuna matematičke pričuve definira se kao razlika između svih budućih isplata osiguravatelja (I_b) i svih budućih uplata osiguranika (U_b) u istom vremenskom trenutku kada se izračunava matematička pričuva.[33]

Iz definicije slijedi:

$$ {}_tV_x = I_b - U_b\,. \tag{5.92}$$

Iz navedenog je vidljivo kako se ova metoda temelji na očekivanjima, odnosno vezana je za budući vremenski period.

Kao i kod retrospetivne metode tako i ovdje treba ponovo staviti naglasak na vrijeme, tj. uvažavati vremensku vrijednost novca. Ako se raspiše polazna definicijska jednakost vrijedi slijedeće:

$$ l_{x+t}\cdot{}_tV_x = K\left(\frac{d_{x+t}}{r} + \frac{d_{x+t+1}}{r^2} + \frac{d_{x+t+2}}{r^3} + \dots\right) - P\left(l_{x+t} + \frac{l_{x+t+1}}{r} + \frac{l_{x+t+2}}{r^2} + \frac{l_{x+t+3}}{r^3} + \dots\right) \tag{5.93}$$

Ako cijelu jednakost podijelimo sa r^{x+t} slijedi:

$$ \frac{l_{x+t}\cdot{}_tV_x}{r^{x+t}} = K\left(\frac{d_{x+t}}{r^{x+t+1}} + \frac{d_{x+t+1}}{r^{x+t+2}} + \frac{d_{x+t+2}}{r^{x+t+3}} + \dots\right) - P\left(\frac{l_{x+t}}{r^{x+t}} + \frac{l_{x+t+1}}{r^{x+t+1}} + \frac{l_{x+t+2}}{r^{x+t+2}} + \frac{l_{x+t+3}}{r^{x+t+3}} + \dots\right) \tag{5.94}$$

Uvažavajući jednakosti $D_x = \frac{l_x}{r^x} = v^x\cdot l_x$ i $C_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} = v^{x+1}\cdot d_x$ (5.95)

[33] Šain, Ž., ibidem, str. 134.

Prethodna jednakost poprima oblik:

$$D_{x+t} \cdot {}_tV_x = K(C_{x+t} + C_{x+t+1} + C_{x+t+2} + C_{x+t+3} + \ldots) - P(D_{x+t} + D_{x+t+1} + D_{x+t+2} + D_{x+t+3} + \ldots) \quad (5.96)$$

Matematička pričuva je jednaka:

$${}_tV_x = \frac{K \cdot M_{x+t} - PN_{x+t}}{D_{x+t}} \quad (5.97)$$

Ovu metodu obračuna matematičke pričuve podržavaju sve vrste osiguranja kao i retrospektivnu metodu.

Knjigovodstvena metoda izračunava matematičku pričuvu u godini *t* za prethodnu godinu. Prema ovoj metodi matematička pričuva se dobije tako što se stanje iz prethodne godine uveća za matematičku pričuvu, suma se ukamati i potom se od dobivene sume oduzmu sve uplate.

Neka je poznata matematička pričuva ${}_{t-1}V_x$ za l_{x+t-1} osiguranu osobu živu u godini $x+t-1$. Njena vrijednost je:

$$l_{x+t-1} \cdot {}_{t-1}V_x \quad (5.98)$$

Neka je ponovo *P* iznos neto premije kuju će uplatiti l_{x+t-1} živih osiguranih osoba u godini $x+t-1$. Na početku $x+t-1$ godine ukupan iznos novca je:

$$l_{x+t-1} \cdot {}_{t-1}V_x + l_{x+t-1} \cdot P \quad (5.99)$$

Na kraju $x+t-1$ godine prethodni iznos će se ukamatiti za jednu godinu (jedan obračunski period) i iznosit će:

$$l_{x+t-1} \cdot ({}_{t-1}V_x + \cdot P) \cdot r \quad (5.100)$$

Na kraju $x+t-1$godine osiguravatelj mora isplatiti osiguranu sumu K za d_{x+t-1} umrlih osiguranih osoba i potom utvrditi matematičku pričuvu za l_{x+t} živih osoba:

$$l_{x+t} \cdot {}_tV_x = l_{x+t-1} \cdot ({}_{t-1}V_x + P) \cdot r - K \cdot d_{x+t-1} \quad (5.101)$$

Nakon dijeljenja jednakosti sa l_{x+t} dobije se:

$${}_tV_x = \frac{l_{x+t-1}}{l_{x+t}} \cdot ({}_{t-1}V_x + P) \cdot r - K \cdot \frac{d_{x+t-1}}{l_{x+t}} \quad (5.102)$$

Ako prvi član desne strane jednakosti pomnožimo i istovremeno podijelimo sa r^{x+t-1}, a drugi član jednakosti pomnožimo i podijelimo sa r^{x+t} dobije se jednakost kako slijedi:

$$ {}_tV_x = \frac{l_{x+t-1}}{l_{x+t}} \cdot \frac{r^{x+t-1}}{r^{x+t-1}} \cdot \left({}_{t-1}V_x + P\right) \cdot r - K \cdot \frac{d_{x+t-1}}{l_{x+t}} \cdot \frac{r^{x+t}}{r^{x+t}} \tag{5.103} $$

$$ {}_tV_x = \frac{l_{x+t-1}}{r^{x+t-1}} \cdot \frac{r^{x+t}}{l_{x+t}} \cdot \left({}_{t-1}V_x + P\right) - K \cdot \frac{d_{x+t-1}}{r^{x+t}} \cdot \frac{r^{x+t}}{l_{x+t}} \tag{5.104} $$

$$ {}_tV_x = \frac{D_{x+t-1}}{D_{x+t}} \left({}_{t-1}V_x + P - K \frac{C_{x+t-1}}{D_{x+t-1}} \right) \tag{5.105} $$

Prema dobivenoj jednakosti se obračunava matematička pričuva za godinu t ako je poznata matematička pričuva za prethodnu godinu $t-1$.

Uz poznati iznos matematičke pričuve za godinu t matematička pričuva u slijedećoj godini $t+1$ je:

$$ {}_{t+1}V_x = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}} \left({}_tV_x + P - K \frac{C_{x+t}}{D_{x+t}} \right). \tag{5.106} $$

Grupne metode

Osiguravatelj koji ima veći broj osiguranika, iz praktičnih razloga, za obračun matematičke pričuve koristit će grupne metode. Cilj je svakog osiguravatelja na kraju poslovne godine što prije obračunati matematičku pričuvu za cijeli portfelj životnih osiguranja. Kako bi se broj računskih operacija minimizirao osiguravatelj poseže za grupnim metodama obračuna. U teoriji osiguranja poznato je više metoda grupnog obračuna matematičke pričuve. Zajedničko svim metodama je pojednostaviti i ubrzati obračun. Izbor metode grupnog obračuna matematičke pričuve ovisi o cilju koji se želi postići primjenom obračuna. Ako je cilj da iznos obračunate pričuve dobiven pomoću jedne od grupnih metoda bude u potpunosti točan i jednak iznosu matematičke pričuve koji je dobiven pomoću jedne od individualnih metoda, onda će izbor biti među grupnim metodama u užem smislu.

Općenito izbor metode ovisi prvenstveno od vrsta osiguranja koje su zastupljene u portfelju osiguravatelja, a zatim i od svrhe koju sami osiguravatelj želi postići pojednostavljivanjem obračuna.[34]

Temeljni princip na kojem se temelje grupne metode u užem smislu je postavljanje obračuna matematičke pričuve da nema odstupanja od individualnog obračuna. Drugim riječima individualne metode koje su primijenjene na jedno osiguranje sada se primjenjuju na čitavu grupu osiguranja. To znači, grupne metode u užem smislu polaze od individualnog obračuna matematičke pričuve i to, iznos matematičke pričuve (V_t) se definira kao razlika između sadašnje vrijednosti budućih osiguranih suma (A_t) i sadašnje vrijednosti neto premija $(P \cdot a_t)$

Analitički

$$V_t = A_t - P \cdot a_t \qquad (5.107)$$

Karupova metoda treba dati rezultate identične onima koji se dobiju pri individualnom obračunu pričuve što znači treba jednakost za individualni obračun za jedno osiguranje prilagoditi grupi osiguranja. Ako se sa *S* označi iznos osigurane sume, sa *SP* iznos neto premije za osiguranu sumu onda će postavljena opća formula poprimiti slijedeći oblik:

$$V_t \cdot S = A_t \cdot S - a_t \cdot SP \qquad (5.108)$$

Ovaj obračun vrijedi za jedno osiguranje. Analogno za jednu grupu osiguranja koja imaju iste elemente bitne za obračun matematička pričuva će imati iznos prema jednakosti:

$$\sum (V_t \cdot S) = A_t \cdot \sum S - a_t \cdot \sum SP \qquad (5.109)$$

Usporedbom dobivene jednakosti i one u individualnoj metodi obračuna ekvivalentnost je evidentna. Konstante pri individualnom obračunu su osigurana suma *S* i neto premija *SP*, a ovdje su konstante suma svih osiguranih suma cijele grupe osiguranja $\sum S$ i suma svih neto premija cijele grupe osiguranja $\sum SP$.

Drugim riječima matematička pričuva se računa za grupu osiguranja kao za jedno osiguranje, uz pretpostavku jednakosti uvjeta za sva osiguranja koja čine grupu za obračun. Uz istaknute

[34] Šain, Ž., ibidem, str. 141.

konstante u jednakosti su varijabilne veličine A_t i a_t i one zavise o modelu životnog osiguranja i starosti osiguranika.

Karupova metoda je najčešće primjenjivana metoda grupnog obračuna upravo radi svoje jednostavnosti obračuna.

Altenburgerova metoda za razliku od Karupove metode transformira opću jednakost za individualni obračun matematičke pričuve na grupu osiguranja kao funkciju jednog parametra i to doživljenih godine starosti u trenutku obračuna ili godina rođenja osiguranika. Za sve ostale elemente osiguranja uvode se pomoćni brojevi koji se računaju na početku osiguranja i ostaju nepromijenjeni tijekom trajanja osiguranja. Altenburger je definirao pomoćni koeficijent K u obliku:

$$K = SPN_{x+m} + SdN_{x+n} \tag{5.110}$$

gdje je:

$SP -$ neto premija , $S -$ osigurana suma, $d = 1 - v$, $m -$ vrijeme plaćanja premija, $n -$ vrijeme trajanja osiguranja, $x -$ starost osigurane osobe.

Koeficijent K omogućava grupiranje svih osiguranja prema starosti u trenutku obračuna, a svi ostali elementi osiguranja su sadržani u koeficijentu K kao konstanti. Dakle koeficijent K sadrži gotovo sve ono što je u Karupovoj metodi bilo istaknuto kao kriteriji grupiranja osiguranja. Stoga je u ovoj metodi pojednostavljivanje u načinu grupnog obračuna matematičke pričuve očito, a točnost je ista kao po Karupovoj metodi. Altenburgerova metoda je stoga jako prihvatljiva u praktičnoj primjeni.

Whitingova metoda daje točan rezultat u obračunu matematičke pričuve kao i individualne metode. Uspoređujući ovu metodu sa prethodno navedene dvije sličnost je veća prema Altenburgerooj metodi. Prema Whitingovoj metodi osiguranja se grupiraju ponovo prema starosti osigurane osobe u trenutku obračuna matematičke pričuve.

Razlika između koeficijenta K kod Altenburgera i kod Whitinga je u tome što se komutativni brojevi kod Altenburgera svode na starost osiguranika o isteku osiguranja, a kod Whitinga se komutativni brojevi daju prema prisutnoj starosti osiguranika, tj. starosti na početku osiguranja.[35]

Ova metoda se može primijeniti na sve vrste osiguranja.

[35] Šain, Ž., ibidem, str. 143.

Fouretova metoda se temelji na retrospektivnom načinu obračuna matematičke pričuve. Pričuva na kraju tekuće godine $\left({}_{t}V\right)$ dobije se tako što se na prošlogodišnju matematičku pričuvu $\left({}_{t-1}V\right)$ doda godišnja neto premija (P)i postignuta računska kamata u tekućoj godini pa se od tako dobivene sume oduzmu sve isplate za slučaj smrti $\left(d_{x+t-1}\right)$.[36]

Pri ovakvom obračunu polazi se od pretpostavki: datum rođenja svih osiguranih osoba je 1. siječnja, sva osiguranja počinju 1. siječnja. Time godine starosti osigurane osobe i proteklo vrijeme trajanja osiguranja do trenutka obračuna, a to je 31. prosinca, uvijek je cijeli broj i dodatno olakšava sami obračun matematičke pričuve. Uz sve navedeno pretpostavka je godišnjeg obračuna premija i isplate za osigurani slučaj vrše se na kraju godine.

Fouretova metoda ima preporuku za praktičnu primjenu pri čemu se ne smije zaboraviti njena naslonjenost na prethodne obračune pri čemu se eventualno nastala ranija pogreška može prenijeti i u slijedeće razdoblje.

Približne metode grupnog obračuna

Kada osiguravatelj ne može u zadanom roku izvršiti obračun matematičke pričuve u točnom iznosu, biva prinuđen posegnuti za jednom od približnih (aproksimativnih ili metoda u širem smislu) metoda pomoću koje će procijeniti matematičku pričuvu. Izbor približne metode ponovo ovisi o strukturi portfelja samog osiguravatelja. U slučaju usvajanja približnog obračuna osiguravatelj će svakako morati povremeno uraditi točan obračun prema jednoj od ranije navedenih metoda. Obično se prakticira procjena vrijednosti matematičke pričuve na pr. svako druge i četvrte godine, točna vrijednost se obračunava svako treće pa pete godine itd. Time se korigira odstupanje procijenjenih vrijednosti od točnih u godinama u kojima je procijenjena matematička pričuva. Kako bi se odstupanja od točnih vrijednosti svela na što manju moguću mjeru valja voditi računa o izboru približne metode koja će u odgovarajućim uvjetima dati zadovoljavajuće rezultate.

5.4.3. Konverzije u životnom osiguranju i njihov utjecaj na oblikovanje matematičke pričuve

Promjene ili konverzije u životnom osiguranju događaju se nekada planirano i unaprijed dogovoreno, a može se dogoditi i kasnija ili naknadno dogovorena konverzija. Kako bi se

[36] Šain, Ž., ibidem, str. 143.

konverzija, koja je možda neizbježna u danom trenutku ili je pak planirana, ostvarila pozitivno za obadvije ugovorne strane potrebno je identificirati njene uzroke i ne samo to nego i pokušati sagledati moguće refleksije na konačan ishod konverzije.

Glavni preduvjet konverzije je postojanje stvarne ili možda hipotetske razlike između ugovorom preciziranog modela životnog osiguranja i novonastale situacije u okruženju ili kod ugovornih strana. Moguće razlike su najčešće izvan utjecaja ugovornih strana životnog osiguranja. Novonastala situacija u okruženju može biti rezultat mjera monetarno-kreditne i fiskalne politike, zatim razlog joj se može nalaziti u stopi inflacije, u stopi kupovne moći i sl.[37]

Razlike koje rezultiraju konverzijom u životnom osiguranju nerijetko inicira ugovaratelj osiguranja iz razloga koji su možda vezani za potrebu ili želju smanjenja premije i sl. Međutim konverziju kao pozitivno rješenje dane situacije može tražiti i osiguratelj. Upravo u konverziji koja je inicirana od strane osiguratelja naziru se utjecaji poslovnih rizika. Pretpostavka dugoročne promjene kamatnih stopa može biti uzrok ili razlog konverzije jer njena promjena izravno djeluje na oblikovanje premije kroz aktuarsko-financijske modele.

Životno osiguranje i matematička pričuva vezani su i za tablice smrtnosti, a time izravno za stopu smrtnosti čija promjena također može biti razlogom konverzije.

Budući su osiguratelji koji se bave životnim osiguranjem sudionici prvenstveno na financijskom tržištu, ali i drugim tržištima tako svaka promjena na financijskim tržištima ima odraz na plasirana sredstva matematičke pričuve, a time izravno može opet biti jedan novi uzrok ili razlog konverzije.

[37] Šain, Ž., Ibidem, str. 117.

6. OBUJAM MATEMATIČKE PRIČUVE I POSLOVNI RIZICI

Društvena korisnost osiguranja očituje se u kontinuiranom unaprjeđenju zaštite, efikasnoj naknadi šteta i isplati osiguranih svota. Značaj osiguranja proizlazi iz činjenice da svijet do danas nije pronašao bolja rješenja od onih koja pruža osiguranje kao sustavna djelatnost. Sektor osiguranja ima važnu funkciju u okviru financijskog sustava. On je područje odgovornosti i brige regulatora za stabilnost i efikasnost financijskih tržišta. Povjerenje osiguranika u sustav osiguranja implicite je povjerenje u cjelokupni financijski sustav. Društva za osiguranje upravljanju tuđom štednjom, iz čega proizlazi njihova gospodarska, socijalna i društvena odgovornost.

6.1. Modeliranje rizika u životnom osiguranju

Utjecaj poslovnih rizika društvo za osiguranje osjeća od samog početka već prilikom oblikovanja premija i tu ne staje preuzimanje rizika, nego osiguravatelji preuzimaju i one druge rizike vezane za plasmane sredstava na financijskom tržištu. Sve to na određen način utječe na solventnost društva za osiguranje, te je od izuzetne važnosti identificirati i optimalno upravljati svim poslovnim rizicima. Pod pojmom poslovni rizici misli se na sve rizike kojima je izloženo društvo za osiguranje. Njihova temeljna klasifikacija je:

- rizici pribave
- operativni rizici
- investicijski rizici
- reosiguravateljni rizici

Rizici pribave se dijele na:

- rizik neprimjerene premije neživotnog osiguranja
- rizik neprimjerene premije životnog osiguranja.

Temelj poslovanja društava za osiguranje je osiguranje sredstava putem premije koja će osigurati redovito poslovanje društva za osiguranje i ispunjavanje njegovih temeljnih zadaća. Stoga posebna pozornost dana je riziku pribave, odnosno, vjerojatnosti kako osiguravatelj neće prikupiti dostatne premijske prihode za isplatu šteta ili osiguranih svota koji bitno determinira financijski položaj osiguravatelja. Sve počinje rizicima pribave, te tako i oblikovanje matematičke pričuve je pod utjecajem takvog rizika i to rizika neprimjerene premije životnog osiguranja.

Operativni rizici se dijele na:

- rizik nedostatnih tehničkih pričuva neživotnih osiguranja
- rizik nedostatne matematičke pričuve životnih osiguranja
- rizici ljudskog čimbenika
- rizici metodologije
- rizici informacijske tehnologije

Investicijski rizici se dijele na:

- rizik suprotne strane (kreditni rizik)
- tržišni rizici volatilnosti financijske imovine, a njih čine
    - kamatni rizik
    - valutni rizik
    - rizik vlasničkih vrijednosnica

Reosiguravateljni rizik je rizik neplaćanja reosiguravatelja.[38] Reosiguravateljni se rizik može definirati kao vjerojatnost neispunjavanja ugovorne obveze reosiguravatelja prema osiguravatelju; odnosno u užem smislu svodi se na kreditni rizik društva za reosiguranje. Zaštita od rizika reosiguranja podrazumijeva procjenu rizika insolventnosti društva za reosiguranje. Upravljanje rizikom reosiguranja u društvu za osiguranje obuhvaća poduzimanje sljedećih aktivnosti i mjera:

- prije zaključenja ugovora s reosigurateljom osobito ozbiljno proučiti njihova financijska izvješća i kreditni rejting koji objavljuju renominirane rating agencije,
- tijekom trajanja ugovora provjeravati i nadzirati bonitet reosiguratelja,
- ograničiti kumulativnu izloženost prema pojedinom reosiguratelju,
- uspostaviti redovitu razmjenu bonitetnih informacija s ciljem uspostavljanja visoke razine povjerenja sa svim reosigurateljnim partnerima.

[38] Ćurković, M., Jakovčević, D., Osiguranje i rizici, RRIF, Zagreb, 2007., str. 95.

Poslovni rizici koji izravno utječu na životno osiguranje i matematičku pričuvu su posebno istaknuti u prethodnoj klasifikaciji. Svi istaknuti poslovni rizici imaju svoj utjecaj na matematičku pričuvu sa vremenskom razlikom, svaki u danom trenutku.

S početkom razvoja ugovora o životnom osiguranju osjetan je utjecaj operativnog rizika nedostatne matematičke pričuve životnih osiguranja. Operativni rizici su rizici gubitaka koji rezultiraju iz neodgovarajućih ili pogrešnih internih procesa, ljudi i sustava ili iz vanjskih događaja.

Cilj svakog osiguravatelja je, ne samo prikupiti premije nego i dugoročno gledano povećati vrijednost svojih financijskih sredstava, a to uvjetuje aktivno sudjelovanje prvenstveno na financijskom tržištu, ali i drugim tržištima. Biti aktivan sudionik na financijskom tržištu, osiguravatelju neizostavno donosi utjecaj tržišnih rizika volatilnosti financijske imovine. Tržišni rizici su množina, a vezani su najčešće za kamatni rizik, valutni rizik i rizik vlasničkih vrijednosnica. Sve navedene rizike osiguravatelji trebaju identificirati, kontrolirati i konačno upravljati njima kako bi svoje poslovanje učinili profitabilnim.

Radi svih spomenutih rizika životno osiguranje je, može se reći, jedan stohastički proces, proces u kojem se tijekom trajanja ugovora događaju određene promjene uzrokovane različitim rizicima i ne samo rizicima.

Matematička pričuva životnih osiguranja može biti podcijenjena ili precijenjena s obzirom na realnu kamatnu stopu s kojom su osiguravatelji plasirali naplaćene premije. Regulatorna tijela i nadzorne institucije propisuju metodu obračuna matematičke pričuve te posredničkih i zastupničkih troškova svojstvenih životnim osiguranjima. Efikasno upravljanje rizikom nedostatnosti matematičke pričuve u kontekstu upravljanja operativnim rizikom nameće uvažavanje i poduzimanje sljedećeg:

- praćenje tablica smrtnosti i posljedično ažuriranje aktuarskih modela,
- kontinuirano motrenje kamatnjaka i prinosa na tržištima kapitala,
- modeliranje utjecaja valutnih tečajeva na visinu matematičke pričuve,
- u aktuarskim računicama preferirati konzervativni pristup.

Budući su osiguravatelji koji se bave životnim osiguranjem sudionici na financijskim i drugim tržištima tako svaka promjena na financijskim tržištima ima odraz na plasirana sredstva matematičke pričuve, a time izravno može opet biti jedan novi uzrok ili razlog konverzije.

6.2. Društva za osiguranje kao investitori na financijskom tržištu

Značaj osiguranja u suvremenoj ekonomiji je neupitan i prepoznat je stoljećima. Osiguranje je praktično nužno i za poslovanje i poduzeće; za svaku fizičku i pravnu osobu. Međutim, osiguranje također pruža javni interes zbog svoje uloge u poslovnim odnosima i zaštiti velikog dijela imovine društva. Stoga rizike pojedinca dijeli na više njih, rizike zajednice na više zajednica. Bez osiguranja privatni komercijalni sektor ne bi bio u stanju funkcionirati. Bez osiguranja pojedinci i obitelji ostali bi bez osiguranja od neizvjesnosti u svakodnevnom životu. Osiguranje je tip ugovornih financijskih institucija nudeći zaštitu od financijskih troškova vezanih za gubitak života, zdravlja i imovine.[39] Pribavljene premije osiguravatelji ulažu prvenstveno u financijsku, ali i drugu imovinu koju kupuju na tržištima. Kako društva za osiguranje u svojoj pasivi imaju dugoročne obveze koje su osjetljive na aktuarske i druge rizike (npr. promjene stope smrtnosti), a s druge strane zbog strukture aktive, posebna pozornost se daje tržišnim rizicima. Dugoročni i stabilni izvori u obliku premija s malom osjetljivošću na pritisak povlačenja sredstava (rizik likvidnosti) daje osiguravateljima mogućnost koncentriranja portfelja u dugoročnu financijsku imovinu s višim prinosom, ulaganje u različite instrumente s različitom korelacijom prinosa kako bi se diversificirao rizik. Prikupljene premije neće biti odmah isplaćene vlasnicima premija nego će biti uložene u različite oblike imovine kako bi se uskladile tehničke rezerve za isplatu budućih obveza i nepredvidivih rizika.

Financijska kriza pokazuje kako su osiguravatelji bili jedan od ključnih sudionika financijskog tržišta zbog posjedovanja jednog dijela imovine u dionicama i hipotekarnim obveznicama. Ipak na tržištu se ne pojavljuju samo kao investitori osiguravatelji kreiraju i određene proizvode namijenjene transferu kreditnog rizika „credit default swap“[40]. Pod utjecajem financijske krize osiguravatelji bilježe rast investicijskog rizika i pad vrijednosti investicijskog portfelja.

6.3. Solventnost društava za osiguranje i investicijski portfelj

Kada se govori o solventnosti društva za osiguranje potrebno je promatrati istu s više aspekata: procjene obveza, procjene imovine, premije u dugoročnim politikama i

[39] Burton, M., Nesiba, R., Brown, B.: An Introduction to Financial Markets and Institutions, 2009, str. 428.
[40] Više pogledati u Schich, S.: Insurance Companies and the Financial Crisis, OECD, 2009.

reosiguranja. Razlika između vrijednosti imovine i procijenjenih budućih obveza predstavlja financijsku snagu društva za osiguranjem i ujedno pokazatelj solventnosti samo ako je procjena pouzdana. Na solventnost društava za osiguranje utječe matematička pričuva (uključujući pričuvu za potencijalne obveze) i procjena imovine društva za osiguranje. Solventnost promatrana sa aspekta društava za osiguranje je sposobnost njihova nesmetanog poslovanja, a sa aspekta klijenata i supervizora zaštićenost njihovih koristi. Solventnost ovisi o iznenadnim fluktuacijama obveza, fluktuaciji vjerojatnosti nastanka obveza i njihovih trendova, gubitcima u investiranju.

Investicijski portfelj društava za osiguranje sačinjen je od sljedećih pojedinačnih oblika financijske imovine:

- vrijednosni papiri s fiksnom kamatnom stopom i obveze,
- dionice i imovina,
- derivati i ugovorene opcije,
- ostali oblici imovine „izvanbilančne pozicije“,
- ostali oblici imovine.

Investicijski portfelj osiguravatelja izložen je riziku kamatne stope, dionice, robe, deviznog tečaja, marže, koncentracije i nelikvidnosti, kretanja cijene imovine. Stoga se može govoriti o tržišnom riziku. Rizik kamatne stope predstavlja izloženost gubitku koji je posljedica promjene kamatne stope. Rizik kapitala i imovine je vjerojatnost gubitka nastalog fluktuacijama na tržištu dionica i druge imovine. Valutni rizik je vezan uz promjenu vrijednosti novca, odnosno, deprecijaciju vrijednosti imovine denominirane u stranoj valuti. Kretanje zarade na instrumentima ovisno od njihove kvalitete, likvidnosti i dospijeća i izlaganje kompanije varijaciji tržišne vrijednosti koja ovisi o vrijednosti obveza nazivamo temeljnim rizicima. Rizik reinvestiranja označava vjerojatnost pada prinosa na ponovno uložena sredstva. Rizik koncentracije predstavlja vjerojatnost gubitka kao posljedicu koncentracije investicija u jedno zemljopisno područje ili drugi ekonomski sektor. Rizik aktive i pasive predstavlja učinak inflacije i promjene kamatne stope na vrijednost aktive i pasive. Rizik izvanbilančnih pozicija promjena je vrijednosti imovine i obveza, kao što su swapovi.

Moguće je reći kako se koncept solventnost u upravljanju investicijskim portfeljom društva za osiguranje susreće sa:[41]

- rizikom tipa 1 – rizik neizvjesnosti portfelja „replicating“, prinosima portfelja društvo za osiguranje treba pokriti sve obveze koje su pod utjecajem financijskih rizika,
- rizikom tipa 2 – rizik ročne neusklađenosti „mismetch“.

Solvency I u fokusu ima ispunjavanje kvantitativnih kapitalnih zahtjeva, nova načela supervizije osiguranja ne traže samo kvantitativne nego i kvalitativne zahtjeve sadržane u stupovima Solvency II. Tranzicija od Solvency I do Solvency II nije samo primjena složenijih obrazaca izračuna premije nego i uvođenje sveobuhvatnog sustava upravljanja rizicima kod osiguravatelja. Sustavom se pokušava identificirati ukupna izloženost preuzimanja rizika i osigurati prikladne mjere i pravila upravljanja. Solvency II stavlja supervizore u poziciju da identificira i verificira mjere koje su poduzete od strane uprave u ranoj fazi. Solvency II temelji se na:

- ukupnom pristupu bilanci stanja,
- value at risk pristup za utvrđivanje kapitalnih zahtjeva,
- obuhvat rizika,
- kapitalni zahtjev temeljen na razini vjerojatnosti na jednogodišnjoj razini,
- standardni vs. interni modeli.

Solventnost investicijskog portfelja društva za osiguranje može se prikazati obrascem.

$$Sol^{MR} = (x^2 Sol^{(dionice\ )2} + Sol^{(imovina\ )2} + Sol^{(fiksna\ )2} + Sol^{(devizna\ )2}) + Sol^{(derivati\ )}$$

Gdje je:

$Sol^{dionice}$ = solventnost zahtijevana prema ulaganju u dionice

$Sol^{imovine}$ = solventnost zahtijevana prema ulaganjima u imovinu

$Sol^{devizna}$ = solventnost zahtijevana za imovinu denominiranu u stranoj valuti

Sol^{fiksna} = solventnost zahtijevana za ulaganju u imovinu s fiksnom kamatom

$Sol^{derivati}$ = solventnost zahtijevana za razliku između tržišne vrijednost derivata i tržišne vrijednosti ugovorenih opcija u obvezama.

[41] Mourik, T.: Market Risks in Insurance Companies – description and measurment approach from the perspective of solvency requirments, 2003, str. 4.

6.4. Rizici u tradicionalnim inovativnim metodama u životnom osiguranju

Za osiguravatelje, rizik je nerazdvojiv od posla i može se pojaviti u više različitih oblika. Rizik je stanje u kojemu postoji mogućnost negativnog odstupanja od poželjnog ishoda koji očekujemo ili kojemu se nadamo.[42] Općenito, rizik je varijacija mogućih ishoda u danoj situaciji u budućnosti. Izloženost riziku je značajnija što je vjerojatnost odstupanja od očekivanih rezultata veća. Međutim, zbog mjerljivosti rizika, raznim statističkim i matematičkim metodama, rizikom se može racionalno upravljati.[43] Rizici životnog osiguranja svoje izvore mogu naći u:

1. neprikladnom dizajnu proizvoda,
2. određivanju cijene,
3. preuzimanje rizika,
4. upravljanju reosiguranjem.

Kreiranje proizvoda predstavlja uvođenje novog proizvoda ili varijaciju postojećeg. Postoji više rizika koji se vezuju za kreiranje proizvoda, njegov razvoj, upravljanje i potencijalna ograničenja. Kako bi se izbjegao ovaj izvor rizika potrebno je u okviru upravljanja rizikom:

- u proces kreiranja proizvoda uključiti dovoljno ljudi sa prikladnim iskustvima i znanjima,
- raspraviti želju i sposobnost osiguravatelja za preuzimanje rizika,
- jasno definirati i utvrditi prikladne razine ovlasti za odobravanje svih materijalnih aspekata kreiranja proizvoda,
- analizirati prirodu životnog osiguranja koja uključuje sve oblike rizika koje su svojstveni proizvodu i sve koji će biti isključeni (npr.: smrt, invalidnost, prihod, trauma), klasifikaciju kriterija za ove rizike koji su svojstveni proizvodu i sve koji će biti isključeni, prirodu garancije ili opcije (uključujući financijske i opcije osiguranja), struktura naknada i koristi, pristupe reosiguranja rizika u različitim tipovima životnog osiguranja,
- analizirati potencijalno tržište za novi proizvod, konkurenciju i prijedlog plana distribucije,
- testiranje tržišta za predloženi proizvod,
- proces za osiguranje prikladnog određivanja cijene,

[42] Vaughan, E. J., Vaughan, T. M.: Osnove osiguranja: Upravljanje rizicima, Mate d.o.o., Zagreb, 2000., str. 5.
[43] Ćurak, M., Jakovčević, D.: Osiguranje i rizici, RRIF plus – d.o.o., Zagreb, 2007., str. 62.

- plan implementacije uključujući prilagodbu svih relevantnih politika i procedura čime se uvažavaju zahtjevi novog proizvoda,
- post implementacijska revizija
- proces prikupljanja statističkih i drugih informacija koji će osigurati istraživanje iskustava i pomoći planiranju smjera poslovanja
- metode za nadzor usklađenosti sa politikom i procedurama kreiranja proizvoda.

Određivanje cijene proizvoda životnog osiguranja pod utjecajem je brojnih činitelja uključujući tržište i pritisak konkurencije, regulaciju, poreze i očekivanu profitabilnost i kapitalne zahtjeve. Cijena također treba uključiti troškove vezane za proizvode i procijenjene investicijske prihode ostvarene kroz novčane tijekove i rezervama. Cjenovni rizik može se pojaviti kada potraživanje, diskontna stopa, troškovi, porezne obveze, investicijski parametri ili vrijednost opcije ili garancije koje su korištene u određivanju cijene proizvoda nisu točno procijenjene i mogu izložiti osiguravatelja riziku financijskog gubitka. Životno osiguranje kako bi upravljalo cjenovnim rizicima mora uvažiti sljedeće elemente:

- proces kako bi se osigurala odgovornost za cjenovno određenje pristupom ljudima sa prikladnim znanjem i iskustvima,
- identificirati i procijenit rizike uključene u proces cjenovnog određenja
- jasno definirati i utvrditi prikladne razine ovlasti za odobravanje svih materijalnih aspekata određivanja cijena,
- scenarij test kojim se identificira utjecaj promjena u pretpostavkama kao što su potraživanje, troškovi, porezi i investicijski parametri profitabilnosti proizvoda na različitim razinama cijene,
- proces uključivanja ključnih interesnih skupina u odluku o cijeni,
- proces nadzora, sposobnost nadzora, devijacije iskustva na temelju pretpostavki.

Preuzimanje rizika „underwriting“ je proces u kojem osiguravatelj utvrđuje želi li ili ne preuzeti prijedlog za osiguranje i, ako prihvati uvjete koji će biti primijenjeni i razinu premije koja će se zaračunati. Slabosti u procesu preuzimanja, u tipovima i razinama kontrole te sustava može izložiti osiguravatelja dugoročnoj volatilnosti. Upravljanje rizikom u životnim osiguranjima mora voditi računa o sljedećem:

- proces kako bi se osigurala odgovornost za preuzimanje pristupom ljudima sa prikladnim znanjem i iskustvima,

- mjere za razumjevanje i uklanjanje rizika akumulacije i koncentracije, npr. višestruke politike za istu životnu skupinu životnog osiguranja na jednoj lokaciji,
- proces za utvrđivanje ovlasti i definiranje ograničenja ovlasti,
- procjena rizika (procedure za identifikaciju pristupnika koji mogu biti prihvaćeni po standardnim stopama i uvjetima, pristupnika koji ne mogu biti prihvaćeni po standardnim stopama i procedurama,
- metode nadzora usklađenosti sa politikama i procedurama preuzimanja kao što su: pregled po područjima ili upravljanja portfeljem, pregled politike , pregled po grupi rizika.

Tri najznačajnija rizika u životnom osiguranju:

1. rizik promjene „risk of change" – promjena stopa, npr. stope smrtnosti koja pokazuje konstantnu i dugoročnu devijaciju od baze za kalukulaciju,
2. rizik pogreške „risk of error" – označava pogrešku u izboru baze u kalkulaciji,
3. rizik slučajne fluktuacije „risks of random fluctuations"– slučajne fluktuacija cijene dionica ili određeni događaji.

Jedne su ljudske pogreške i prirodne katastrofe koje su obilježile prethodna desetljeća, a posve druge obilježavaju razdoblje pred nama. Inovativni financijski proizvodi bez prikladnog osiguranja i sustava upravljanja rizikom i nepostojane korporativne kontrole dovele su nas do financijske krize 2007. godine i 2008. godine i najdublje recesije. Tržišta kapitala imaju značajnu ulogu u upravljanju rizikom kroz kreiranje novih financijskih instrumenata u obliku sekjuritiziranih instrumenata. U ovakvim uvjetima primjećuje se rast izloženosti novim rizicima. Ovo razdoblje se može označiti razdobljem ekstremnih rizika sa neprikladnim upravljanjem rizikom. Kasne 90. godine prošlog stoljeća donose rizike financijskih balona na tržištu kapitala a povezano sa terorističkim napadom. Korporativna korupcija u Enronu najbolje predstavlja ekstremni oblik rizika. Razorne posljedice uragana Karine, Rite i Wilme također predstavljaju ekstremne rizike u osiguranju uvećane neusklađenim upravljanjem rizikom. Sve ovi izvori izlažu osiguravatelja financijskim gubicima i stalnoj nesposobnosti da udovolji svojim obvezama. Upravljanje rizikom je postalo značajan dio industrije osiguranja, društva za osiguranje su preuzimatelji, ali ponekad i stvaratelji rizika, posjeduju rizik ali i odgovornost za njegovo učinkovito upravljanje.

6.5. Upravljanje rizikom plasmana sredstava na financijskom tržištu

Društva za osiguranje kao poduzeća koriste sustav upravljanja rizikom koji omogućuje razumjeti rizični profil osiguravatelja, identificirati uzroke troškova i analizirati rizike osiguravatelja. Jedna od funkcija osiguravatelja kao posrednika je pomoći klijentima upravljati njihove rizike, unaprijediti njihove rizične profile i smanjiti vjerojatnost nastanka osiguranog slučaja. Prikladnim mjerenjem rizici mogu biti kontrolirani i minimizirani, neki mogu biti izbjegnuti, drugi modificirani ili se može ograničiti njihova frekvencija ili financijske posljedice. Upravljanje rizikom je proces analiziranja mogućih dobitaka ili gubitaka, smanjujući potencijalne gubitke i štiteći financijsku imovinu. Osiguravatelj će, svaki za sebe, odrediti značajnost i koordinaciju rizika između aktive i pasive. Ne samo to, osiguravatelj ispituje sve rizike koji zahtijevaju koordinaciju njegove aktive i pasive. One rizike koji su značajni u smislu njegovog mogućeg utjecaja na ekonomsku vrijednost nastoji se njima upravljati. Rizici koji mogu se pojaviti u poslovanju osiguravatelja su:

1. Tržišni rizik
   - rizik promjene kamatne stope[44]
   - rizik dionica, nekretnina i ostale imovine
   - valutni rizik
   - povezani kreditni rizik
2. Rizik reosiguranja
3. Rizik likvidnosti[45]

Tržišni rizik je osjetljivost financijskog instrumenta ili portfelja na promjenu tržišnih parametara. Rizik promjene kamatne stope (uključujući varijacije u opsegu kreditnog tržišta) predstavlja vjerojatnost gubitka koji je posljedica kretanja kamatnih stopa i njihova utjecaja na buduće novčane tijekove. Ako nije usklađen budući novčani tijek aktive i pasive, kretanja kamatnih stopa mogu imati nepovoljan kamatni utjecaj. Upravljanje kamatnim rizikom je posebice bitno kod životnih osiguranja u kojima osiguravatelj mora 30-godišnju premiju

[44] Najčešći rizici Asset-Liability Management-a su dvije vrste kamatnog rizika. Prvi je rizik reinvestiranja, kada se imovina treba uložiti a kamatne stope su niske te rizik disinvestiranja kada se imovina mora prodati, a kamatne stope su visoke.

[45] International Association of Insurance Supervisors, Standards on Assets – Liability Management, October 2006., Standard br.13, str. 8

ulagati uz stabilne prinose. Rizik dionica, nekretnina i ostale imovine jeste rizik od gubitka koji je posljedica kretanja tržišne vrijednosti dionica i druge imovine. Osiguravatelj može biti izložen nepovoljnim ekonomskim utjecajima do te mjere da se tržišne vrijednosti dionica, nekretnina i druge imovine ne kreću u skladu sa pasivom. Valutni rizik je rizik gubitka, koji je posljedica kretanja tečaja koji pogađa pozicije aktive i obveze iskazane u stranoj valuti što može imati nepovoljan utjecaj na osiguravatelja. Povezani kreditni rizik uočljiv je pri određivanju izloženosti tržišnom riziku što rezultira time da bi osiguravatelj mogao povećati izloženost kreditnom riziku druge strane.

I ne samo to, tržišni rizik sadrži opći tržišni rizik (pri svim ulaganjima) i specifični tržišni rizik (pri pojedinim ulaganjima). On uključuje izloženost derivata kretanjima cijene temeljnih sredstava ili faktorima rizika. Tržišni rizik također uključuje izloženost nepredviđenim kretanjima financijskih varijabli ili kretanjima stvarne ili naznačene promjenjivosti cijene imovine. Tržišni rizik može biti linearan, nelinearan ili usklađen. Izloženost nelinearnom ili usklađenom tržišnom riziku pojavljuje se kroz upotrebu derivata. U vrijeme značajnog ekonomskog previranja pogodnost diversifikacije smanjenja rizika može privremeno nestati i moguće su ozbiljne financijske posljedice. Stoga, osiguravatelj bi trebao biti sposoban izmjeriti svoju izloženost tržišnom riziku kroz rizične faktore (primjerice, kroz kamatne stope, dionice i valute) i kroz čitav portfelj. Radi mjerenja izloženosti faktorima tržišnog rizika osiguravatelj će postaviti odgovarajuću metriku portfelja na promjenu tržišnih parametar.

Opseg kreditnog tržišta može biti glavni uzrok tržišnog rizika. Primjerice, osiguravatelji mogu znatno uložiti u korporacijske obveznice da bi imali prednost viših prihoda pomoću utrživih vrijednosnih papira, recimo ako imaju obaveze koje su nestalne ili diskrecijske. Na kamatne stope mogu utjecati promjene u općim uvjetima kreditnog tržišta i dovesti do raširene kreditne degradiranosti i do razlika između proizvodne i prodajne cijene koje znatno variraju u skladu s položajem obveznica, posebice u ekstremnim situacijama. Pod nekim jurisdikcijama dopustivo je postići veću fleksibilnost u upravljanju ovakvim rizikom držanjem kopije portfelja vladinih vrijednosnica zajedno sa kreditnim derivatima.

Oblikovanje kamatnih stopa trebalo bi uključiti scenarije premještanja, uvijanja i savijanja[46] krivulje prinosa, pojedinačno i u raznim prihvatljivim kombinacijama. Očekuje se od

[46] Premještanje znači paralelno premještanje krivulje prihoda (tj. povrat ulaganja svih rokova pada ili se diže u istoj mjeri). Uvijanje znači skretanje krivulje prihoda (tj. prati se ista promjena nagiba krivulje prihoda).

osiguravatelja sa složenim portfeljem da pokaže više sofisticiranosti u oblikovanju kamatnih stopa (primjerice, stohastičko oblikovanje kamatne stope) nego osiguravatelj sa jednostavnijim portfeljem. Ponekad će osiguravatelj rješenje potražiti u zamijeni sofisticiranosti i točnost sa jednostavnošću i konzervatizmom. Odluke donesene na ovaj način trebaju biti transparentne, tj. jasno razumljive i dokumentirane.[47]

Rizik osiguranja je poseban rizik osiguranja koji narasta iz preuzetog ugovora o osiguranju. Stoga se u svrhu kontrole rizika osiguranja može unutar koncepta Asset-Liability Managementa (ALM) pristupati obradi po dijelovima preuzetog rizika. Na primjer, neodređenost vremenskog rasporeda i veličine budućih plaćanja, posebno za ne-životne poslove, može zahtijevati koordinaciju sa aktivom. Opće stope inflacije, koje mogu utjecati i na zahtjeve i na troškove, su također važan aspekt preuzetog rizika kao što je prekomjerno napuhavanje posebnih zahtjeva. Koordinacija između aktive i pasive je također važna u davanju dopuštenja za bilo koje mišljenje koje može utjecati na isplate učinjene prema polici. Posebice, ugovori o osiguranju mogu imati financijske opcije koje nude izbore nositeljima polica - one uključuju opcije rješenja, opcije zajmova na policu, opcije prekoračenja depozita i pogodnosti povlačenja ili obnavljanja. Kada nositelji polica provode ove opcije, osiguravatelj može imati dodatne troškove tijekom života police ili imati gubitak likvidnosti.

Pošto se rizik ugrađene opcije općenito ne može preinačavati, važno je da osiguravatelji upravljaju svojom aktivom i pasivom na način kojim bi se ublažio njihov mogući utjecaj. Menadžment bi mogao, na primjer, poduzeti radnje kakve su aranžiranje reosiguranja, izdavanje druge vrste polica ili zaustavljanje prodaje proizvoda.

Rizik likvidnosti je izloženost gubitku u slučaju kada bi likvidna imovina, među imovinom koja podržava obaveze, bila nedovoljna kako bi se uvjeti novčanog tijeka ispunili na vrijeme[48]. Ovo bi moglo uvjetovati osiguravatelje na prodaju imovine po nepovoljnim cijenama. Profil likvidnosti jednog osiguravatelja je djelovanje i imovine i obveza, te varira s

---

Savijanje znači da se povrat ulaganja kraćih i duljih rokova kreće u suprotnom smjeru od povrata ulaganja prosječnih rokova (tj. zakrivljenost krivulje prihoda se mijenja).

[47] International Association of Insurance Supervisors, Standards on Assets – Liability Management, October 2006., Standard br.13, str. 7-9.

[48] International Association of Insurance Supervisors, Standards on Assets-Liability Management, October 2006., Standard br.13, str. 6

obzirom na uvjete tržišta. Izravni zahtjevi za gotovinom, ako su do neke mjere predvidljivi, ne bi trebali osiguravatelju predstavljati pretjeran rizik likvidnosti. Bilo koji izravni zahtjev za gotovinskom isplatom može biti rizik ako ne postoji dovoljna količina gotovine. Dobro organiziran osiguravatelj će strukturirati svoju imovinu tako da osigura dovoljno gotovine i tržišnih vrijednosnica kako bi ispunio svoje obaveze kada bude trebalo. Stoga osiguravatelj može sebi smanjiti isplate osiguranicima koji su raskinuli ugovor kako bi prikazao nepovoljne uvjete tržišta, i na taj način osigurao da imovina i dalje bude u skladu sa očekivanim trajanjem obveza. Ponekad, također, postoji mogućnost tempiranja isplate osiguranicima (barem u slučaju individualnih polica životnog osiguranja) kako iznosi ne bi bili isplaćeni dok se odgovarajuća imovina ne proda. Evo nekih mogućih uzroka problema likvidnosti za osiguravatelje:

- namjerna strategija neusklađivanja,
- udruženi rizik ulaganja odnosno, rizik nemogućnosti prodaje sredstava uloženih u jednu članicu konglomerata ili neke grupe, ili situacija kada udružena poduzeća mogu stvoriti otjecanje izvora financiranja ili operativnih izvora osiguravatelja,
- rizik financiranja, tj. rizik kada osiguravatelj nije sposoban osigurati dovoljno vanjskog financiranja, jer mu imovina nije likvidna u trenutku kada mu je takvo financiranje potrebno (primjerice da bi se suočio sa velikim i neočekivanim zahtjevima),
- rizik likvidacijske vrijednosti ili rizik koji nastaje ako neočekivano tempiranje ili količina potrebne gotovine zahtijevaju likvidaciju imovine u trenutku kada tržišni uvjeti rezultiraju gubitkom ostvarene vrijednosti,
- negativni publicitet,
- veliki neočekivani gubitak koji se odmah može isplatiti,
- reosiguravateljeve odgode isplate,
- postupci osiguranika,
- pogoršavanje ekonomije sa abnormalno nestalnim i uzdrmanim tržištem,
- politički i pravni rizik, u slučaju nepredvidivih promjena u zakonodavstvu i sudskim odštetama,
- ulaganja koja se ne mogu prodati zbog povezanosti s drugim poduzećima,
- nekoliko osiguravatelja koji se suočavaju s velikim neočekivanim zahtjevima likvidnosti u isto vrijeme s potrebom likvidacije nekih njihovih imovinskih portfelja,

što rezultira situacijom da je tržište nesposobno apsorbirati bilo kakvu vrijednost osim one po nepovoljnoj cijeni.

Svaki osiguravatelj će nastojati strukturirati svoju imovinu kako bi je uskladio s tijekom gotovine uz očekivane kratkoročne obveze. U tom kontekstu osiguravatelj bi trebao imati plan kako postupati sa neočekivanim izljevom gotovine – ili putem zadržavanja dodatne likvidne imovine ili imajući hitno kreditno sredstvo. Veličina ili kreditna procjena osiguravatelja, njegov status (tj. kao zajednički osiguravatelj) i/ili lokalno reguliranje mogu ograničiti njegov pristup financiranju. Ako je veličina osiguravatelja neznatna, on neće imati izbora pri financiranju koji su dostupni većim osiguravateljima.

Ovisno o uvjetima koje postavlja nadzorni tim i u slučaju da je to dopušteno, posuđivanje može biti važan aspekt osiguravateljeve strategije upravljanja aktivom i pasivom. No, osiguravatelji moraju biti oprezni kada se oslanjaju na ovaj izvor likvidnosti. Primjerice, nakon situacije rizika ulaganja (primjerice katastrofe ili velikih tražbina), moguće je da banke ne žele posuditi novac osiguravatelju. Trebale bi se utvrditi kreditne linije koje bi mogle smanjiti ovaj rizik ako je to moguće. Takve kreditne linije bi trebale biti dovoljno raznolike da bi smanjile koncentraciju rizika i svele ga na razinu financijskih institucija koje također mogu pretrpjeti gubitak u ekstremnim situacijama.

Manjak raznolikosti u obvezama ili imovinskom portfelju analiziranom po proizvodu, industriji ili kreditoru, može dovesti do povećanog rizika likvidnosti.

Slika 6. Izvori i vrste rizika u poslovanju sektora osiguranja

Strategija investiranja sektora osiguranja		
Novčani priljevi		***Rizici novčanih priljeva***
premije		solventnost, klijenti
investicijski prihodi	↔	kreditni rizik, kamatni rizik, kapital
kontribucija reosiguranja		kreditni rizik, operativni rizik
potraživanja		oporavak

Novčani odljevi		*Rizici novčanih odljeva*
obveze prema osiguranicima		katastrofe, rezerve, inflacija
kamate i dividende	↔	solventnost, konkurencija
reosiguranje		selekcija, cijena
naknade savjetnicima		nadzor, projekti
porezi		regulacija, planiranje

Izvor: AIRMIC, ALARM, IRM, A Risk Management Standards, London, UK, 2002, str. 3.

Svaki osiguravatelj bira odgovarajuće alate mjerenja, kao što su pokazatelj likvidnosti i način oblikovanja novčanog toka, kako bi odredio svoju izloženost riziku likvidnosti, pri čemu ne postoje jednostavne formule koje vrijede za sve osiguravatelje. Međutim, osiguravatelji bi mogli postići hitno financiranje likvidnosti ako bi došlo do katastrofe zbog ranijeg povlačenja gotovine po uvjetima polica reosiguranja ili putem nekih drugih sredstava. Ovo bi se moglo uzeti u obzir pri ocjenjivanju količine likvidnosti koja je dostupna da bi se uskladila sa zadanom razinom.

6.6. Kreiranje portfelja disperzijom rizika ulaganja sredstava

Svaki preuzeti rizik u procesu preuzimanja pojedinačni je posao osiguravatelja. Njihova ukupnost čini portfelj osiguranja određenog osiguravajućeg društva. Osim brojem sklopljenih ugovora o osiguranju, portfelj osiguranja se može izraziti i brojem osiguranika te zbrojem premija osiguranja. Svi ugovori o osiguranju odnosno svi osiguranici ili zbroj svih premija osiguranja označavaju ukupni portfelj osiguranja osiguravajućeg društva. Međutim, portfelji osiguratelja mogu se izraziti i na nižim razinama. Uobičajeno je izražavanje portfelja grupom od nekoliko vrsta ili pojedinim vrstama osiguranja.

Cilj osiguravajućeg društva je ostvarenje stabilnog portfelja osiguranja, odnosno portfelja koji će svojom veličinom i kvalitetom, osobito u smislu homogenosti rizika, osigurati dovoljno sredstava za pokriće rizika preuzetih u osiguranju, pokriće troškova poslovanja osiguravatelja i ostvarenje zarade. Osiguravatelj upravljajući prikupljenim sredstvima treba voditi računa o dvije stvari:[49]

1. strukturi imovine u portfelju uvažavajući prinos i rizik,[50]
2. izboru pojedinih oblika imovine unutar skupine (npr. dionice određenih kompanija).

Pri kreiranju investicijskog portfelja osiguravatelja potrebno se voditi temeljnim načelima:

1. maksimizirati neto stopu povrata dajući slobodu investiranja u različite investicije,
2. maksimizirati sigurnost investicija kroz inversticije male volatilnosti, dobre utrživosti i diverzifikacijom investicija,
3. ispunjavati obveze radi osiguranja likvidnosti kroz usklađivanje investicija i obveza – usklađivanje u denominaciji (valuti) na koju glase obveze i investicije, ročno usklađivanje obveza i investicija, uvažavanje inflacije i utjecaja na prinos vrijednosnica u koje se ulaže,
4. udovoljiti zahtjeve regulacije prije svega u zahtjevima solventnosti i mogućim ograničenjima u politici investiranja.

Radi stvaranja kvalitetnog portfelja osiguranja preuzimatelji rizika trebaju izvršiti pravilnu selekciju i klasifikaciju rizika, odnosno utvrditi pravu veličinu rizika i cijenu za njegovo preuzimanje primjereno veličini. Naime, prema staroj aktuarskoj poslovici, svaki je rizik, dobar rizik, ako je dobro ocijenjen.

6.7. Rizici reosiguranja

Upravljanje reosiguranjem je proces selekcije, nadzora, revizije, kontrole i dokumentiranja sporazuma o reosiguranju životnih osiguranja. Ovi ugovori mogu biti korišteni od strane životnog osiguranja kako bi se upravljalo velikim rizicima koji su izvan razine tolerancije rizika životnih osiguranja, smanjuju volatilnost profita, upravljanju kapitalom i financijskim potrebama. Korištenje reosiguranja u životnom osiguranju predstavlja prihvatljivo korištenje sporazuma o ograničenom transferu rizika.

[49] Davis, E. P.: Financial market Activity of Life Insurance Companies and Pension Funds, BIS, Economic papers, No. 21, 1988, srt. 14.

[50] Bilanca stanja životnih i neživotnih europskih osiguravateljnih skupina pokazuje udio u aktivi 8% dionica, 56% obveznice, 36% ostala imovina, 2% reosiguranje, detaljnije pogledati International Association of Insurance Supervision, Insurance and Financial Stability, 2011.

Korištenjem reosiguranja osiguravatelj može ostvariti određene koristi, ali također se izlaže određenim rizicima. Novi ili postojeći ugovor o reosiguranju može biti izvor sljedećih rizika:[51]

- rezidualnog rizika osiguranja,
- pravni rizik,
- rizik druge ugovorne strane,
- rizik likvidnosti,
- operativni rizik.

Rezidualni rizik osiguranja nastaje kao razlika između potrebe za reosiguranjem i stvarnog razdoblja pokrića ugovorom. Na sličan način moguće je osiguravatelja u reosiguranju izložiti temeljnom riziku tako da iznos koji je reosiguran transferom rizika nije usklađen sa iznosom gubitka kojeg osigurava osiguravatelj. Pravni rizik se javlja kada odredbe ugovora ne odražavaju namjeru osiguravatelja ili kada ugovor nema pravnu snagu. Rizik druge ugovorne strane rezultat je nesposobnosti ili potencijalnog odbijanja osiguravatelja ili interesne osobe u slučaju alternativnog mehanizma transfera rizika isplate obveze koja je ustupljena. Rizik likvidnosti se pojavljuje kao jaz između plaćanja obveza osiguravatelja osiguraniku i primitku osiguranih potraživanja od reosiguravatelja. Značajna činjenica u kontekstu rizika reosiguranja je usklađivanje razdoblja osiguranja na strani primarnog osiguranja i strani reosiguranja. U slučaju reosiguranja dugoročnih obveza životnog osiguranja (osiguranje u slučaju smrti ili invaliditeta) kratkoročnim pokrivanjem reosiguravatelja, osiguravatelj je u potpunosti izložen riziku pogreške i riziku promjena, dok se reosiguravatelj izlaže riziku volatilnosti, odnosno, slučajne fluktuacije. U praksi bi svako povećanje stope smrtnosti za kratkoročno reosiguranje značilo povećanje stopa koje se pokrivaju. U slučaju ročnog usklađenja u reosiguranju učinci rizika na reosiguravatelja se umanjuju. Operativni rizik javlja se zbog neprikladnog ugovora ili nedovoljnog tehničkog ili administrativnog kapaciteta za upravljanje i prikupljanje iznosa reosiguravatelja.

Prema OECD reosiguranje ima dvije skupine rizika:[52]

1. tehničke rizike,
2. rizik propasti dužnika.

[51] Autoritė des Marchės Financiers, Reinsurance Risk Management Guidelines, 2013., str. 7.
[52] OECD, Assessing the Solvency of Insurance Companies, Paris, 2003., str. 23.

Kako bi upravljanje rizicima reosiguranja u životnim osiguranjima ostvarilo svrhu potrebno je definirati i dokumentirati ciljeve i strategiju osiguravatelja za buduće korištenje ugovora o reosiguranju za postojeće poslove uvažavajući rizični apetit osiguravatelja. Potrebno je stalno selektirati, nadzirati, revidirati ugovore o reosiguranju, stalno usklađivanje s politikama i procedurama reosiguranja. Osiguravatelj treba utvrditi:

1. odgovornost i ulogu upravnog odbora i menadžmenta
    - u okviru integriranog sustava upravljanja rizikom razviti, usvojiti i implementirati politiku reosiguranja,
    - stalno identificirati, procjenjivati, dokumentirati i revidirati rizični apetit osiguravatelja i razine rizika u odnosu na reosiguranje,
    - definirati ciljeve korištenja reosiguranja,
    - razviti, usvojiti i primjenjivati politiku upravljanja rizikom reosiguranja,
    - osigurati da osoblje koje je zaduženo za primjenu politike upravljanja rizikom reosiguranja ima potrebna znanja i vještine
    - jasno definirana ograničenja nadležnosti i nadzor u reosiguranju.

2. integrirati sustav upravljanja rizicima reosiguranja u integralni sustav upravljanja rizikom
    - uvažavajući proces strateškog i financijskog planiranja vodeći računa o potrebama za reosiguranjem i prikladnosti reosiguranja koje se nudi, promatrati reosiguranje ne samo kao instrument osiguranja od rizika nego i kao izvor rizika,
    - voditi računa o novim proizvodima koji će se naći u ponudi.

3. donijeti politiku upravljanja rizikom reosiguranja
    - definirati ograničenja sukladno rizičnom apetitu osiguravatelja i njegovoj razini tolerancije rizika,
    - definirati uvjete pod kojima se koriste alternativni mehanizmi transfera rizika utvrđujući njihov utjecaj na profitabilnost, solventnost i kapitalne zahtjeve,
    - predvidjeti mogućnost korištenja posrednika, npr. brokera reosiguranja,
    - utvrditi proces selekcije reosiguravatelja radi diversifikacije rizika,
    - definiranje vrsti ugovora o reosiguranju,
    - utvrditi ograničenja za iznose i vrste rizika koji se reosiguravaju,

- definiranje uvjeta koji će se nalaziti u ugovorima,
- prijenos osiguranja i korištenje alternativnih mehanizama prijenosa rizika,
- uvođenje procesa nadzora primjena politike,
- revizija politike i stalno unaprjeđenje.

4. proces upravljanja reosiguranjem
    - osigurati prijedloge ugovora u skladu za zakonskim propisima,
    - analizirati utjecaj ugovora na izloženost riziku osiguravatelja i na politiku preuzimanja rizika,
    - osigurati identificiranje svih materijalnih rizika povezanih sa ugovorom i njihovo upravljanje,
    - analizirati financijsku poziciju reosiguravatelja,
    - osigurati pravno praćenje svih klauzula ugovora.

Posebna pitanja koja se odnose na životno reosiguranje vezana su za rizike smrtnosti, kamatne stope i stope greške.

U pravilu, izdavanje police životnog osiguranja uzrokuje iscrpljivanje viška životnog osiguravatelja, jer prve godine pričuva plus provizija i druga pitanja koja se odnose na troškove mogu preći iznos premije prve godine. To početno investiranje se obično ne pokrije za nekoliko godina.

Funkcije životnog reosiguranja mogu uključivati prenos rizika smrtnosti, ništavno osiguranje ili otkup osiguranja prenosa rizika, prenos investicijskog rizika, rast prodaje i profita (zato što reosiguravatelji obično imaju niže administrativne troškove), rast reosiguravateljevih tekućih poslova i ograničene zahtjeve u slučaju katastrofa (višestruka smrt zbog jednog događaja će imati dramatični učinak na osiguravateljevu zaradu).

Za svakog reosiguravatelja koji stiče viškove, ključno razmatranje započinjanja reosiguranja je poređenje sadašnje vrijednosti budućih premija reosiguranja sa sadašnjom vrijednošću budućih isplata reosiguranja i izdataka.[53]

---

[53] International Association of Insurance Supervisors, Risk Transfer, Disclosure and Analysis of Finite Reinsurance, October 2006., Standard br. 11, str. 6.-7.

7. EMPIRIJSKO UTVRĐIVANJE UTJECAJA POSLOVNIH RIZIKA NA OBLIKOVANJE I PLASMAN MATEMATIČKE PRIČUVE

U svrhu istraživanja i utvrđivanja utjecaja poslovnih rizika na oblikovanje i plasman matematičke pričuve provedeno je istraživanje u sektoru životnih osiguranja u Bosni i Hercegovini. Istraživanje je u jednom dijelu provedeno pomoću upitnika koji su odaslani društvima za osiguranje koji se bave životnim osiguranjem. U Bosni i Hercegovini je aktivno deset osiguravatelja života (sedam u Federaciji BiH i tri u Republici Srpskoj). Taj dio istraživanja vezan je za dio rada koji se odnosi na rizike koji prate oblikovanje matematičke pričuve. Drugi dio istraživanja bio je vezan za rizike koji prate plasman matematičke pričuve i podatci su crpljeni iz Agencije za nadzor osiguranja Federacije BiH i Agencije za osiguranje Republike Srpske. Struktura plasmana osiguravatelja života u Republici Hrvatskoj analizirana je temeljem podataka u izvješćima koja su dostupna na internetskoj stranici Hrvatske agencije za nadzor financijskih usluga. Istraživanje je provedeno u prvoj polovini 2014. godine.

7.1. Empirijsko korištenje aktuarskih tablica i izračun neto premije kao determinante matematičke pričuve životnih osiguranja

Matematička pričuva je izravno prema svojoj definiciji vezana za neto premiju životnih osiguranja.

Premija kod životnih osiguranja nije prirodna premija u smislu proporcionalnosti sa rizikom smrtnosti koji je dio tablica smrtnosti. To je prosječna premija konstantne vrijednosti ili, pak, varijabilna premija s matematičkom zakonitosti pa je u prvim godinama osiguranja veća od prirodne premije, a u drugom dijelu, kasnijim godinama je manja od prirodne. Premija koju plaća osiguranik je bruto premija koja se sastoji od dva dijela i to: troškova poslovanja i neto premija. Jedan dio neto premije je štedna premija, specifičnost životnih osiguranja. Iz štedne premije se izdvaja matematička premija koja formira matematičku pričuvu.

Svaki osiguravatelj svojom premijom mora biti konkurentan na tržištu osiguranja. Međutim, za istu vrstu životnog osiguranja, izračunata premija se može razlikovati u različitim društvima za osiguranje. Ta različitost se temelji na korištenju različitih tablica smrtnosti, različite kamatne stope, a može se razlikovati i u visini troškova poslovanja.

Kako je neto premija izravno vezana za vjerojatnost smrtnosti bilo je zanimljivo istražiti koje tablice smrtnosti koriste društva za životna osiguranja u Bosni i Hercegovini u usporedbi sa Republikom Hrvatskom i nekim drugim zemljama.

Dužinu očekivanog trajanja života na dan rođenja određuje razina i smjer promjene smrtnosti po starosti, a predstavlja sintetički pokazatelj smrtnosti stanovništva.
Demografska istrživanja u novije vrijeme potvrđuju konstantni rast životnog vijeka kako muškaraca tako i žena. Posebno se taj rast osijeća u razvijenijim zemljama svijeta.
U tablici koja slijedi prikazan je broj ljudi starijih od 60 godina u odnosu na broj ljudi starosne dobi od 20 do 59 godina. Taj omjer se često naziva omjer starosne ovisnosti, jer tradicionalno stariji ljudi unutar društva, ovise o mlađim (radni dio populacije) vezano za financijsku i gospodarsku potporu.

Tablica 5. Omjer starosne ovisnosti

	Godina		
Zemlja	**2000**	**2010**	**2030**
Australia	29.1%	34.7%	51.4%
Austria	36.6%	42.9%	77.3%
Belgija	40.5%	44.7%	68.5%
Kanada	29.1%	35.2%	58.8%
Danska	35.3%	45.5%	65.0%
Finska	35.9%	47.0%	70.6%
Francuska	37.9%	43.0%	63.0%
Njemačka	41.8%	46.0%	76.5%
Grčka	42.5%	46.8%	69.2%
Irska	28.0%	30.7%	42.5%
Italija	42.7%	49.7%	78.5%
Japan	41.4%	58.4%	79.0%
Meksiko	13.9%	16.2%	28.7%
Novi Zeland	28.6%	33.9%	54.9%
Poljska	29.8%	31.4%	50.8%
Južna Koreja	18.3%	23.9%	53.0%
Španjolska	38.2%	42.2%	69.7%
Švedska	41.7%	51.0%	72.5%
Švicarska	37.6%	48.9%	84.4%
Turska	16.4%	17.8%	28.6%
Ujedinjeno Kraljevstvo	38.1%	43.3%	66.1%
SAD	29.3%	33.2%	52.0%

Izvor: Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Moshe A. Milevsky, 2006.

Veći omjer ovisnosti stvara veće opterećenje za mlađe generacije. U 2000. godini, omjer starosne ovisnosti kretao se oko 30% u SAD-u i Kanadi, ali do 2030 taj broj će skočiti na 52% u SAD-u i do 59% u Kanadi, prema procjenama UN-a.
Nasuprot ovim omjerima u zemljama poput Meksika i Turske starosni omjeri su 14% i 16% što govori da su ove zmlje „mlade“ , a procjene govore o rastu na 28% do 2030. godine.

Međutim, bez obzira na ove istaknute omjere u svim zemljama se događa rast omjera starosti. Ljudi žive duže, kao što je prikazano u tablici 2.

Tablica 6. Očekivani broj godina provedenih u mirovini diljem svijeta

	Muškarci			**Žene**		
Zemlja	**2000.**	**2010.**	**2030.**	**2000.**	**2010.**	**2030.**
Australija	19.0	19.7	21.0	27.1	27.8	29.1
Austrija	21.1	22.1	23.8	27.3	28.6	30.2
Belgija	22.0	23.1	24.8	29.8	30.9	32.5
Kanada	18.5	19.2	20.5	25.5	26.2	27.5
Danska	17.3	18.0	19.3	22.9	24.1	25.7
Finska	20.3	20.9	22.3	25.2	26.0	27.2
Francuska	20.5	21.4	23.2	26.7	27.5	29.0
Njemačka	19.4	20.2	22.1	25.3	26.6	28.2
Grčka	18.4	18.9	20.2	23.7	24.4	25.7
Irska	16.9	17.4	18.7	22.7	23.6	25.2
Italija	19.5	20.1	21.4	27.0	27.8	29.1
Japan	16.3	17.3	18.9	23.5	24.7	26.8
Novi Zeland	18.3	18.8	20.2	24.8	25.5	26.9
Španjolska	18.8	19.3	20.7	25.7	26.4	27.7
Švedska	18.7	19.4	20.6	23.2	23.9	25.4
Švicarska	16.6	17.2	18.4	24.3	24.9	26.2
Turska	14.8	15.4	16.7	15.3	15.9	17.0
Ujedinjeno Kraljevstvo	18.0	18.9	20.5	23.8	25.0	26.8
SAD	16.8	17.6	19.4	22.0	23.2	24.9

Izvor: Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Moshe A. Milevsky, 2006.

Ljudska dugovječnost je fascinantna tema. Prema riječima dr. James Vaupel, ravnatelja Instituta Max Planck za demografska istraživanjima, prosječna količina vremena koje žene žive u najzdravijih zemalja je u porastu u posljednjih 160 godina sa stalnim tempom od tri mjeseca godišnje. Na primjer, u 2010. godini japanske žene imaju životni vijek od oko 85 godina. Trenutno, japanske žene su na prvom mjestu, kada je riječ o ljudskoj dugovječnosti, a projekcija je da će u 2030. godini japanske žena imati životni vijek od 87 godina .

U republici Hrvatskoj tijekom prethodnih pola stoljeća životni vijek se povećao za 12,3 godine za muškarce i 15,3 godine za žene i u razdoblju (2000. – 2002.) iznosi za muško stanovništvo 71,35 godine, a za žensko 78,52 godina. U odnosu na europske zemlje koje su postigle najveće rezultate snižavanja smrtnosti Republika Hrvatska znatno zaostaje. Tako je 2002. godine u većini razvijenih europskih zemalja dužina očekivanog trajanja života iznosila više o 75 godina za muško stanovništvo (najduže u Islndu) i više od 80 godina za žensko stanovništvo (najduže u Španjolskoj). U većini tranzicijskih zemalja očekivano trajanje života je niže nego u Hrvatskoj, a u nekim je došlo do porasta smrtnosti, kao npr. u Rusiji gdje je očekivano trajanje života muškog stanovništva 2001. od 58,9 godina na nižoj razini nego početkom šezdesetih godina prošlog stoljeća.

Budući je duljina životnog vijeka, kroz komutativne brojeve, izravno vezana za neto premiju životnih osiguranja, a time i za matematičku pričuvu posebno treba paziti na demografske promjene i kreiranje tablica smrtnosti.
Što je životni vijek dulji, za osobu staru x godina, to znači više godina plaćanja premije, a to se dalje manifestira na iznos neto premije pa potom i na oblikovanje matematičke pričuve.

Istraživanje osiguravatelja života u Bosni i Hercegovini donijelo je podatak o korištenju tablica smrtnosti prilikom obračuna tarifa u osiguranju života. Osiguravatelji života u BiH, njih 95% koriste tablice smrtnosti iz 1982. godine.
Analizirajući u kontekstu prethodno izloženih pokazatelja, oblikovana premija u životnim osiguranjima nije dobro procijenjena sukladno riziku smrtnosti, odnosno dugovječnosti.
Posljedica je to i ne provedbe popisa stanovništva do prošle godine, što će vjerojatno rezultirati korigiranim novim tablicama smrtnost u Bosni i Hercegovini.

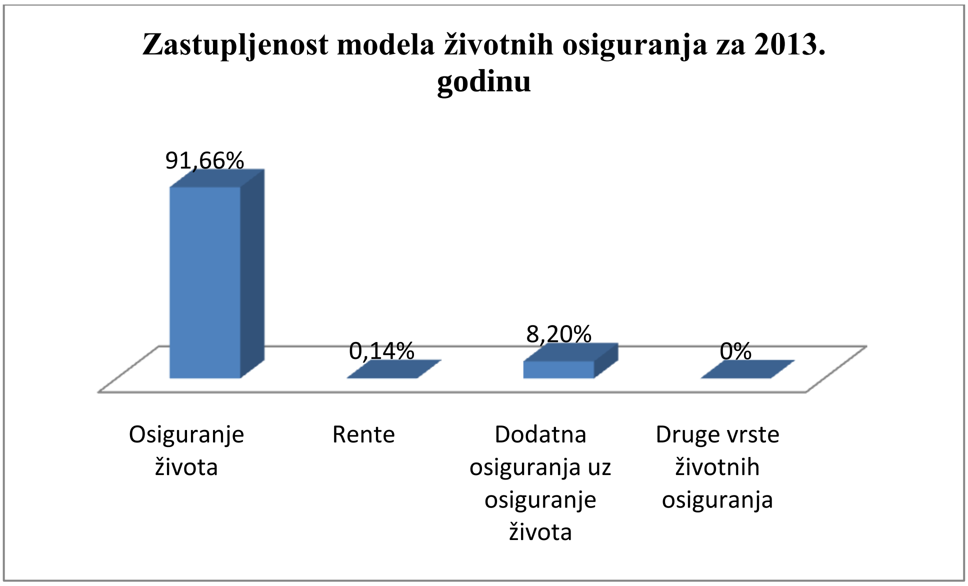
Naime, osiguravatelji života u razvijenim zemljama formiraju tablice smrtnosti na temelju svojih osiguranika što dodatno minimizira rizik smrtnosti odnosno točnije određuje vjerojatnost doživljenja. Ovu prednost imaju razvijeni osiguravatelji života koji imaju veliki broj osiguranika. Osiguravatelji u BiH ne mogu formirati svoje vlastite tablice smrtnosti uslijed nerazvijenosti tržišta životnog osiguranja i sukladno tome malog broja osiguranika.

7.2. Zastupljenost pojedinih modela i proizvoda životnih osiguranja u praksi i implikacije na veličinu matematičke pričuve

Životno osiguranje je, prema svojoj osnovnoj definiciji, određeno različitim faktorima koji daju osnovno obilježje osiguranja. Obilježja životnih osiguranja su složena i ovise o modelu i proizvodu osiguranja. Suvremeni uvjeti poslovanja koje obilježava pojačana konkurencija na financijskim tržištima uvjetuju razvoj novih oblika i modela životnih osiguranja. Novi modeli i oblici najčešće su kombinacija već postojećih oblika pazeći pri tome na homogenost,

odnosno heterogenost rizika koji ih prate. Tako životna osiguranja nalaze vezu sa osiguranjima od nezgode, sa osiguranjima kredita kada polica životnog osiguranja zamjenjuje jamca i slično. Zadnjih pet godina u Federaciji BiH u paleti proizvoda životnih osiguranja dominira osiguranje života i to približno 92%, konstantno od 2009. godine pa do danas.
Na slijedećem grafikonu je prikazana struktura premije životnih osiguranja.

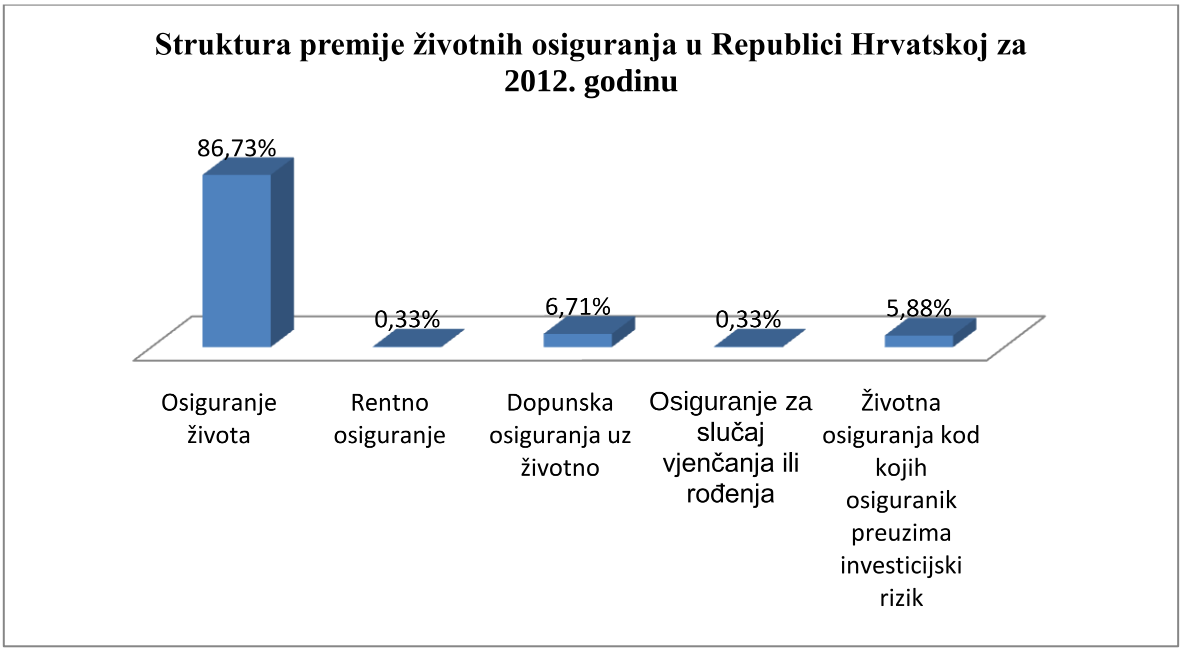
Grafikon 3. Zastupljenost modela životnih osiguranja u ukupnoj premiji u Federaciji BiH za 2013. godinu



Izvor: Izradio Autor

Gledajući strukturu premije životnih osiguranja u 2013. godini osiguranje života je 91,66% sudjelovalo u ukupnoj premiji životnih osiguranja. Na dodatna osiguranja uz osiguranje život otpada 8,20% premije, a rente su uzele 0,14% premije, gotovo neznatno. Veći dio osiguravatelja koji se bave životnim osiguranjima nemaju rente u paleti svojih proizvoda. U modelima osiguranja kapitala najčešće je mješovito osiguranje, odnosno osiguranje života za slučaj smrti i doživljenja. Ostali modeli životnih osiguranja koje navode osiguravatelji u BiH prikazani su tablično.
Struktura premije životnih osiguranja u Republici Hrvatskoj ekvivalentna je strukturi u Bosni i Hercegovini. Prikaz udjela slijedi na grafikonu.

Grafikon 4. Struktura premije životnih osiguranja u Republici Hrvatskoj za 2012. godinu



Izvor: Izradio Autor

Razlika u zastupljenosti pojedinih modela životnih osiguranja prema BiH je u tome što u Republici Hrvatskoj postoje životna osiguranja kod kojih osiguranik preuzima investicijski rizik približno 6% i oko pola postotka osiguranje za slučaj vjenčanja ili rođenja.

Od ukupne premije osiguranja života najčešće je mješovito osiguranje života i to sa približno 85% -tnim udjelom.

Prema zastupljenosti modela osiguranja kapitala postoji ekvivalencija između BiH tržišta i RH tržišta životnih osiguranja.

Tablica 7. Modeli osiguranja kapitala u BiH

Modeli osiguranja kapitala u BiH	Mješovito osiguranje života Garancijsko osiguranje Dječje osiguranje života Osiguranje za slučaj smrti Dodatno osiguranje od posljedica nezgoda uz životno Riziko osiguranje života Riziko osiguranje za slučaj smrti Doživotno osiguranje samo za slučaj smrti Doživotno uzajamno osiguranje Temporarno osiguranje samo za slučaj smrti za jedno i za dva lica Osiguranje za slučaj smrti u slučaju zalaganja police

Izvor: Izradio Autor

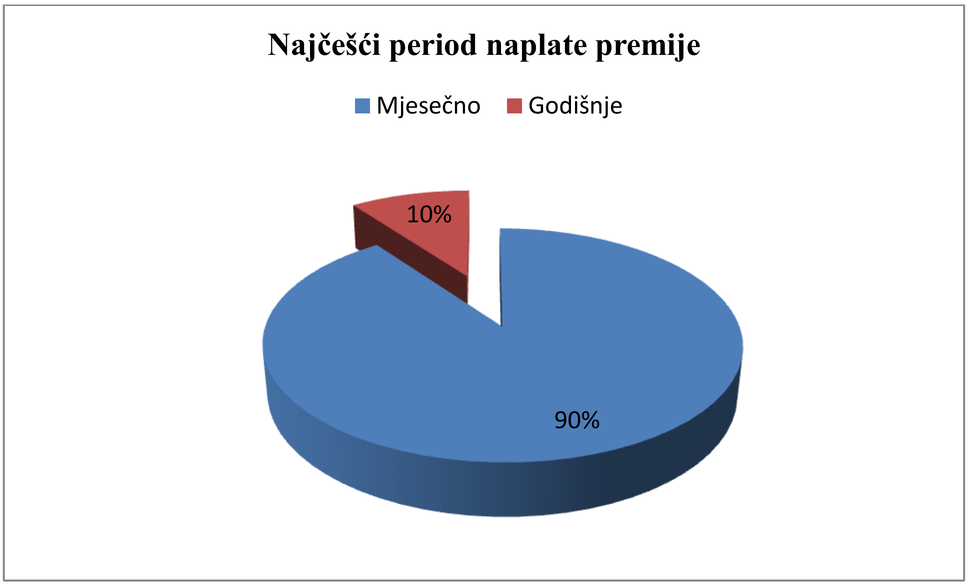
Zajedničko obilježje svih životnih osiguranja je rizik koji je iskazan u premiji, dugi rok osiguranja kapitala, osiguravatelji života u BiH ističu rok od 5 do 40 godina. Dominira stalna premija za vrijeme trajanja osiguranja i nepromjenjivost uvjeta dogovorenih u trenutku sklapanja police osiguranja. Ovdje treba naglasiti kako su u istraživanju osiguravatelji istaknuli i postojanje konverzija u životnom osiguranju uz izravnu dobrovoljnost ugovornih strana.

7.3. Prilagođavanje perioda uplate premija osiguranja u svrhu ostvarenja efikasnije naplate neto premije

Premija životnog osiguranja, kao cijena proizvoda životnih osiguranja, jeste obveza koju osiguranik izvršava prema društvu za osiguranje. Veličina ili iznos premije je kriterij pema kojem osiguranik bira društvo za osiguranje kojem će dati povjerenje i sklopiti ugovor o polici osiguranja. Uz veličinu premije bitan element privlačenja osiguranika i prodaje polica jeste i prilagođavanje perioda uplate premija osiguranja. Prilagoditi periode uplate premija, kod već sklopljenih polica je ponovo bitan segment na putu ostvarenja efikasne naplate neto premije. Stoga društva za osiguranje nerijetko pribjegavaju prilagođavanju perioda uplata premija kako bi povećali broj osiguranika i što efikasnije ostvarili naplatu neto premije. Efikasnost naplate neto premije izravno utječe na oblikovanje matematičke pričuve, a u drugom koraku i na plasman same matematičke pričuve.

Provedeno istraživanje u svrhu ovog rada daje određenu sliku o periodima uplata premija kod osiguravatelja života u Bosni i Hercegovini.

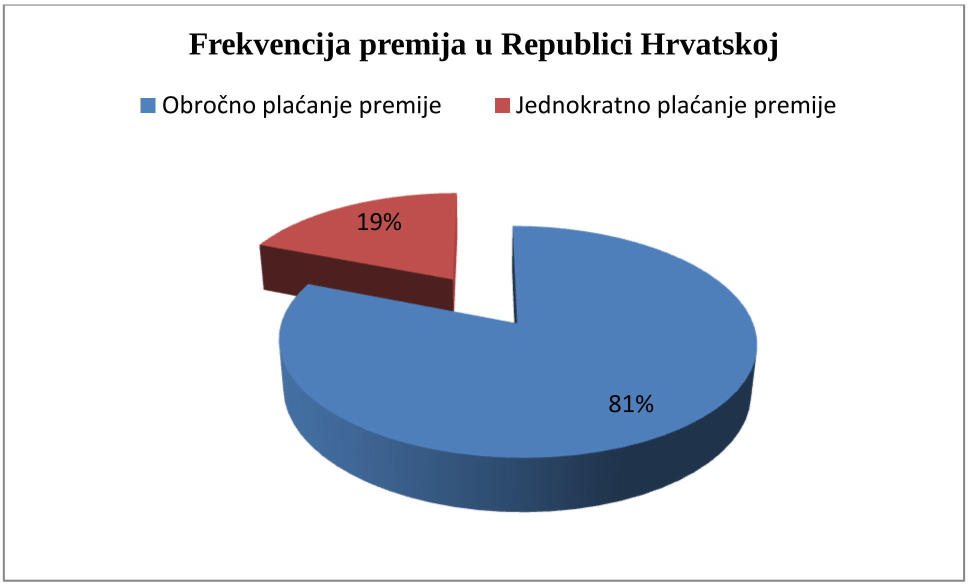
Grafikon 5. Struktura perioda uplata premije životnih osiguranja u BiH



Izvor: Izradio Autor

Prema rezultatima istraživanja dominiraju, oko 90%, mjesečne uplate premija, odnosno mjesec je najčešći period naplate premije. Samo oko 10% premija se naplati na razini godine.
Na pitanje jednokratnosti ili višekratnosti uplata premije odgovori su u korist višekratnih premija (91%), dok jednokratne uplate bilježe zastupljenost 9%.
Razdioba frekvencija uplata premije u Republici Hrvatskoj je podijeljena na dva dijela i to na obročno plaćanje premije (81%) i jednokratno plaćanje premije (19%).

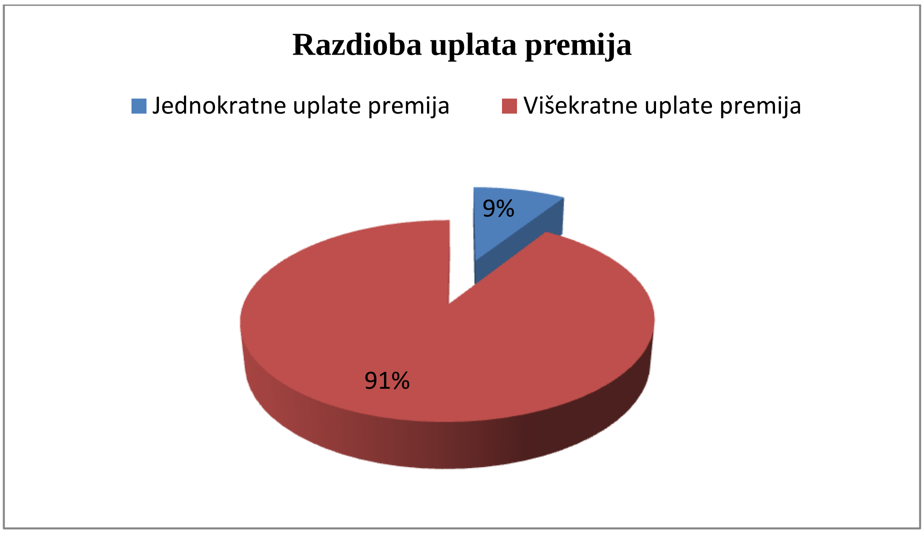
Grafikon 6. Oblici plaćanja premije životnih osiguranja u Republici Hrvatskoj



Izvor: Izradio Autor

Usporedbom prema Bosni i Hercegovini razlika je u tome što u RH se približno 10 postotnih poena premije prelilo na stranu jednokratnog plaćanja.

Grafikon 7. Razdioba uplata premija u životnim osiguranjima u BiH



Izvor: Izradio Autor

Prethodni grafikon je sukladan razdiobi perioda naplate premije. Ovi odnosi načina i perioda uplate premije jasno pokazuju stanje i potrebu tržišta, a sukladno zahtjevima i potrebama osiguranika za prilagođavanjem uplata premije.

Kod uplata premija za osiguranje kapitala odnosi su gotovo isti u pogledu odnosa jednokratnih i višekratnih uplata. Ponovo dominiraju višekratne uplate sa 93% zastupljenosti.

Grafikon 8. Razdioba uplata kapitala prema obliku u BiH

Izvor: Izradio Autor

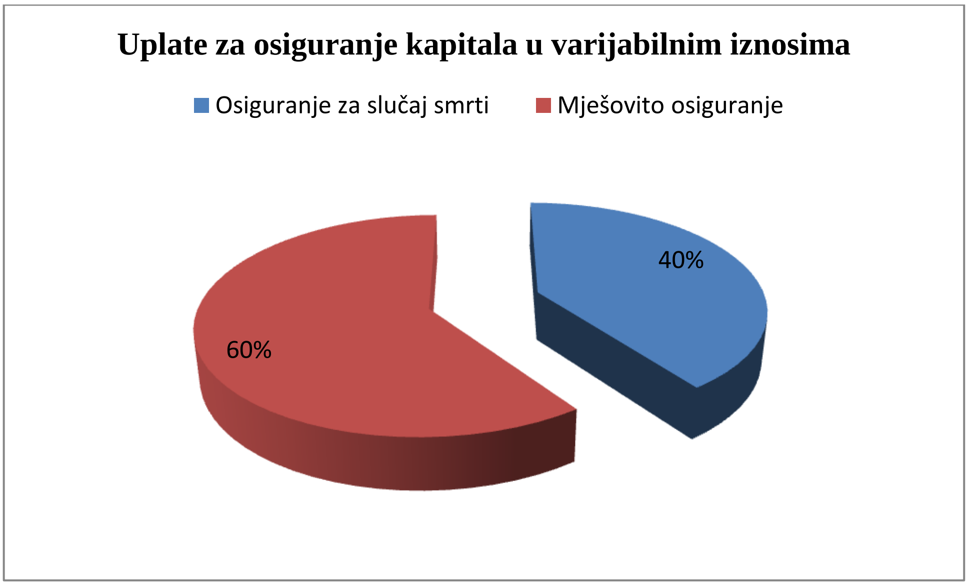
Što se tiče perioda (ciklusa) uplata kapitala u strukturi vremenskih ciklusa zastupljenost ispodgodišnjih uplata je 91%. Dok je samo 9% uplata kapitala na razini godine.

Grafikon 9. Frekvencije uplata kapitala životnih osiguranja u BiH

Izvor: Izradio Autor

Kod osiguranja kapitala najčešće su fiksne uplate u oba pojavna oblika: za slučaj smrti i u mješovitom osiguranju.

Grafikon 10. Uplate za osiguranje kapitala u varijabilnim iznosima



Izvor: Izradio Autor

Od svih varijabilnih uplata 60% se odnosi na osiguranje za slučaj smrti, a 40% za mješovito osiguranje.

Ispodgodišnje uplate kapitala i dominantnost mjesečnih uplata premija i varijabilnost uplata usložnjavaju oblikovanje i stvaraju dodatni rizik pri oblikovanju matematičke pričuve.

7.4. Utjecaj zakonskih regulativa i supervizije na veličinu matematičke pričuve

Sektor osiguranja u Bosni i Hercegovini uređen je entitetski, tj. egzistira sektor osiguranja Federacije, sektor osiguranja Republike Srpske i osiguranje Distrikta Brčko. Analizirajući nadzor sektora osiguranja postoje tri agencije s ulogom kontrole i nadzora rada društava za osiguranje. Na federalnoj razini djeluje Agencija za nadzor osiguranja Federacije BiH, u RS-u djeluje Agencija za osiguranje Republike Srpske i na državnoj razini kao krovna institucija u pogledu sektora osiguranja jeste Agencija za osiguranja u Bosni i Hercegovini.

Zakonska regulativa, odnosno zakonski okvir za rad Agencije za osiguranje u BiH jeste Zakon o Agenciji za osiguranje u BiH (Službeni glasnik BiH", br.12/04). Ovim zakonom regulira se oblast osiguranja u Bosni i Hercegovini s ciljem osiguranja neophodne koordinacije zakona o osiguranju u oba entiteta.

Cilj ovog zakona je da Agencija za osiguranje BiH, slijedeći opće ciljeve i načela, osigura:

- jedinstvenu primjenu zakona o osiguranju između entiteta, kao i postojanje neometane i djelotvorne suradnje između agencija za nadzor osiguranja u Federaciji Bosne i Hercegovine i Republici Srpskoj, te da osigura da se entitetski zakoni primjenjuju i tumače na pravičnoj i jedinstvenoj osnovi
- da zakonodavstvo o osiguranju koje je na snazi u entitetima u potpunosti bude usuglašeno u namjeri da osigura jednak i ravnopravan odnos prema svim društvima za osiguranje u oba entiteta i Brčko Distriktu Bosne i Hercegovine i da osigura jednaku pravnu zaštitu kako za ugovaratelje osiguranja, tako i za treću stranu – podnositelje odštetnih zahtjeva na unutar Bosne i Hercegovine
- Agencija ima obvezu osigurati da zakonodavstvo o osiguranju u Bosni i Hercegovini bude i ostane usuglašeno sa zakonodavstvom Europske unije, koje se primjenjuje na područje osiguranja
- Agencija koordinirano predstavlja i zastupa Bosnu i Hercegovinu u organizacijama koje se bave osiguranjem na međunarodnoj razini, te obavlja kontinuiranu suradnju s njima
- Agencija, uz kontinuiranu suradnju s agencijama za nadzor osiguranja entiteta i Brčko Distrikta, rješava sporove između agencija za nadzor osiguranja u pogledu jedinstvenog tumačenja i primjene zakonodavstva o osiguranju na razini entiteta i Brčko Distrikta i izdaje pismene odluke i mišljenja kojima se osigurava jedinstvena primjena zakonodavstva o osiguranju
- Agencija osigurava i vodi sve relevantne podatke o sveukupnom tržištu osiguranja u Bosni i Hercegovini[54].

Rad entitetske Agencije za nadzor osiguranja u Federaciji BiH oslanja se na zakonsku regulativu sadržanu u tri temeljna zakona: Zakon o društvima za osiguranje u privatnome osiguranju („Službene novine FBiH“,br.24/05), Zakon o osiguranju od odgovornosti za motorna vozila i ostale odredbe o obveznom osiguranju od odgovornosti („Službene novine FBiH“,br.22/05), Zakon o posredovanju u privatnome osiguranju („Službene novine FBiH“,br.22/05) i niz podzakonskih akata.

Bitan segment u radu Agencije, a vezan za životna osiguranja i matematičku pričuvu jeste Pravilnik o visini i načinu ulaganja sredstava. U Agenciji za nadzor osiguranja u Federaciji

[54] Službeni glasnik BiH broj: 12/2004, Zakon o agenciji za osiguranje u BiH, Član 2.

BiH pripremljen je novi Pravilnik o načinu ulaganja sredstava prema kojem se trebaju uskladiti ulaganja osiguravatelja života do 30.6.2014. godine.

Novost u ovom Pravilniku je to što će osiguravatelji života sredstva matematičke pričuve moći ulagati izvan Bosne i Hercegovine i to u:

- Vrijednosne papire čiji je izdavač članica Europske unije ili njihova centralna banka, odnosno vrijednosne papire za koje garantira neki od navedenih subjekata,
- Obveznice i druge dužničke vrijednosne papire kojima se trguje na organiziranom tržištu vrijednosnih papira u zemljama članicama Europske unije,
- Dionice sa kojima se trguje na organiziranom tržištu vrijednosnih papira u zemljama članicama Europske unije

Agencija za nadzor osiguranja regulira i nadzire poslove društava za osiguranje, posrednike u osiguranju i djeluje kao supervizor u sektoru osiguranja. Sukladno zakonskoj regulativi, osnovne zadaće Agencije za nadzor osiguranja su: izdavanje odobrenja za rad društvima za osiguranje, posrednicima u osiguranju (zastupnici u osiguranju i brokeri u osiguranju); davanje mišljenja na dokumente društva za osiguranje koje su prema Zakonu obvezna donijeti; prikupljanje, obrada i evidencija podataka koje Agenciji dostavljaju društva za osiguranje i posrednici u osiguranju; nadzor nad poslovima društava za osiguranje, posrednika u osiguranju i povezanih osoba u području osiguranja; povlačenje i oduzimanje odobrenja za rad društvima za osiguranje i posrednicima u osiguranju; donošenje dokumenata kojima se regulira rad društava za osiguranje, posrednika u osiguranju i ovlaštenih aktuara, te ostale zadaće sukladno zakonskim propisima.

U drugom entitetu sektor osiguranja kontrolira i nadzire Agencija za osiguranje RS čiji rad se oslanja na zakonsku regulativu vezanu za: Zakon o društvima za osiguranje („Službeni glasnik RS“, br.17/05, 01/06), Zakon o osiguranju od odgovornosti za motorna vozila i ostalim obveznim osiguranjima od odgovornosti („Službeni glasnik RS“, br.17/05, 64/06),, Zakon o posredovanju u osiguranju („Službeni glasnik RS“, br.17/05, 64/06), i za niz podzakonskih akata na razini RS-a. Agencija za osiguranje RS supervizorska je institucija na tržištu osiguranje Republike Srpske i ima ovlasti sukladne ovlastima Agencije za nadzor osiguranja FBiH.

Bitan segment za osiguravatelje života jeste Pravilnik o visini ulaganja sredstava za pokriće tehničkih rezervi i minimalnog garantnog fonda društava za osiguranje – pročišćeni tekst od 17.5.2012. godine. Tim Pravilnikom je određena visina pojedinačnih ulaganja sredstava za pokriće tehničkih pričuva životnih osiguranja. Ovaj Pravilnik dopušta društvima za osiguranje ulagati sredstva izvan BiH i to u zemlje članice Europske unije, ali uz suglasnost entitetske

Agencije. Ova ulaganja izvan BiH ograničena su do 20% ukupnih sredstava.

Prema provedenom istraživanju osiguravatelji života nemaju uloženih sredstava izvan BiH zaključno sa 2012. godinom jer do tada zakonska regulativa to nije dopuštala. Godina 2013. je godina koja vrlo vjerojatno neće biti godina ulaganja izvan BiH iz razloga rokova uloženih sredstava. Za očekivati je dakle složeniju strukturu ulaganja osiguravatelja života već sada i u budućnosti. Međutim, za ulaganja na tržištu Europske unije osiguravatelji se trebaju pripremiti strateški u smislu optimizacije rizika jer su tržišta Europske unije otvorena tržišta i izloženija su rizicima.

Nije samo regulacijski okvir opterećen entitetskom uređenosti nego je i supervizija koja je povjerena Agenciji za osiguranje u BiH također prostor gdje se može više kada je u pitanju cjelokupni sektor osiguranja BiH. Cilj Agencije za osiguranje, kao supervizora sektora osiguranja svakako je osigurati financijski zdrave i stabilne osiguravatelje. Zatim zaštita interesa osiguranika je ozbiljna zadaća i cilj supervizora. Za postizanje i realizaciju ovih ciljeva neophodno je postaviti minimum standarda za, u svakom pogledu, zdravo i efikasno poslovanje društava za osiguranje. Ono što je bitno jeste ograničiti izloženost rizicima osiguravatelja i organizirati efikasnu superviziju.

Efikasna supervizija ne znači donositi odluke u ime menadžmenta osiguravatelja niti pružanje određenih garancija za uspješno poslovanje društva. Isto tako Agencija za osiguranje kao supervizor neće provoditi deviznu, kreditnu ili općenito politiku rada društva niti će sprječavati osiguravatelja u preuzimanju komercijalnih rizika. Neki zadaci koje bi trebala sebi postaviti ili već dijelom jeste postavila Agencije za osiguranje u BiH su procjena kompetentnosti upravne strukture osiguravajućeg društva u smislu upravljanja preuzetim rizicima i pravovremene identifikacije i procjene preuzetih rizika. Zadaća supervizora je i procjena adekvatnosti sustava internih kontrola, internih revizija i njihove provedbe, kao i pravovremeno i konzistentno poduzimanje odgovarajućih mjera.

Postavlja se pitanje kako će Agencija za osiguranje u BiH obavljati ili kako obavlja funkciju supervizora. Funkciju supervizora treba promatrati kao permanentan proces koji omogućuje identificiranje poslovnih rizika osiguravatelja i koji fokusira svoje aktivnosti na procesima izgradnje sposobnosti osiguravatelja da upravlja preuzetim rizicima, tj. da ih pravovremeno identificira, procijeni, mjeri i nadzire. Drugo područje djelovanja funkcije supervizora je procjena adekvatnosti sustava internih kontrola te procjena efikasnosti rada internih revizora, i ne samo internih nego i eksternih revizora i aktuara. Posao Agencije za osiguranje će biti efikasniji ako Agencija ostvaruje redovite kontakte sa osiguravateljima, pravovremeno poduzima konkretne mjere i primjenjuje propise.

Ostvariti konstantne i uspješne kontakte sa osiguravateljima u ovakvoj entitetskoj uređenosti kakva je u BiH nedvojbeno ograničava supervizora, Agenciju za osiguranje u radu. Preko entitetskih agencija za nadzor nastojati izgraditi povjerenje i područje definiranosti rizika osiguravatelja, osigurati razmjenu ideja i pri tome ostati do kraja objektivan. Redovitim i povremenim sastancima sa entitetskim agencijama pratiti promjene u procedurama, učinkovito razgovarati o promjenama u poslovanju, specifičnim poslovima i uočenim problemima. Kontakti se mogu ostvarivati na različitim razinama agencija u entitetima ali i na različitim razinama osiguravajućih društava kao što su Upravni, odnosno nadzorni odbor, viši menadžment ili možda neposredni izvršitelji.

Efikasna supervizija nije pozitivna samo za Agenciju koja ju provodi, ne samo za razvijen sektor osiguranja nego je pozitivna i potrebna osiguravateljima sa kvalitetnim portfeljem. Osiguravatelji sa izgrađenim sustavom interne i eksterne kontrole i revizije, sa odgovarajućim sustavom kontrole i upravljanja rizicima su itekako potrebni efikasne supervizije. Na kraju investitori i cjelokupna javnost žele razvijenu i transparentu superviziju.

U vremenu globalizacije i gospodarske krize supervizija, a time i Agencija za osiguranje nalaze se pred izazovima kako uspješno vršiti procjenu adekvatnosti sustava internih kontrola i revizija te sustava procjene i upravljanja rizika. S druge strane izazovi za osiguravatelje su kako razviti adekvatne sustave interne kontrole, sustave identifikacije i procjene rizika, sustave kontrole rizika, kako osigurati njihovu implementaciju. Pozitivno opstati i uklopiti se u „nove globalizacijske trendove“ znači prihvaćati nove regulative, a i dorađivati postojeće. Supervizija sektora osiguranja treba težiti harmonizaciji principima i direktivama EU. Nove regulative se ne odnose samo na harmonizaciju nego i na skretanje pozornosti na strukturu i elemente kapitala, adekvatnu procjenu potraživanja kao i adekvatnost kapitala i solventnost. Zahtijevaju se minimumi standarda za upravljanje rizicima i jačanje uloge i odgovornosti upravljačke strukture. Stoga se u narednom razdoblju na polju regulacije i supervizije trebaju očekivati unaprjeđenja na još nekim poljima:

- kapitalnih zahtjeva/standarda
- upravljanja rizicima
- financijsko izvještavanje/računovodstvena pravila
- sustavu analize i nadzora
- investiranja i reosiguranja
- stres testova
- rating agencija

- koordinacije s Međunarodnim standardima.

Slijediti nove regulative znači isto tako jačati transparentnost, korporativno upravljanje i razvijati konsolidiranu superviziju.

Utjecaj zakonskih regulativa na veličinu matematičke pričuve nalazi se u kriterijima prema kojima se može i smije ulagati matematička pričuva. Zakonska regulativa točno propisuje u koje vrijednosne papire i u kojem udjelu može osiguravatelj života ulagati matematičku pričuvu.

Supervizorski utjecaj na veličinu matematičke pričuve jeste kroz kontrolu propisanih pravila o ulaganju.

7.5. Ambijent u kojem posluju životna osiguranja i plasman slobodnih sredstava na financijskim tržištima

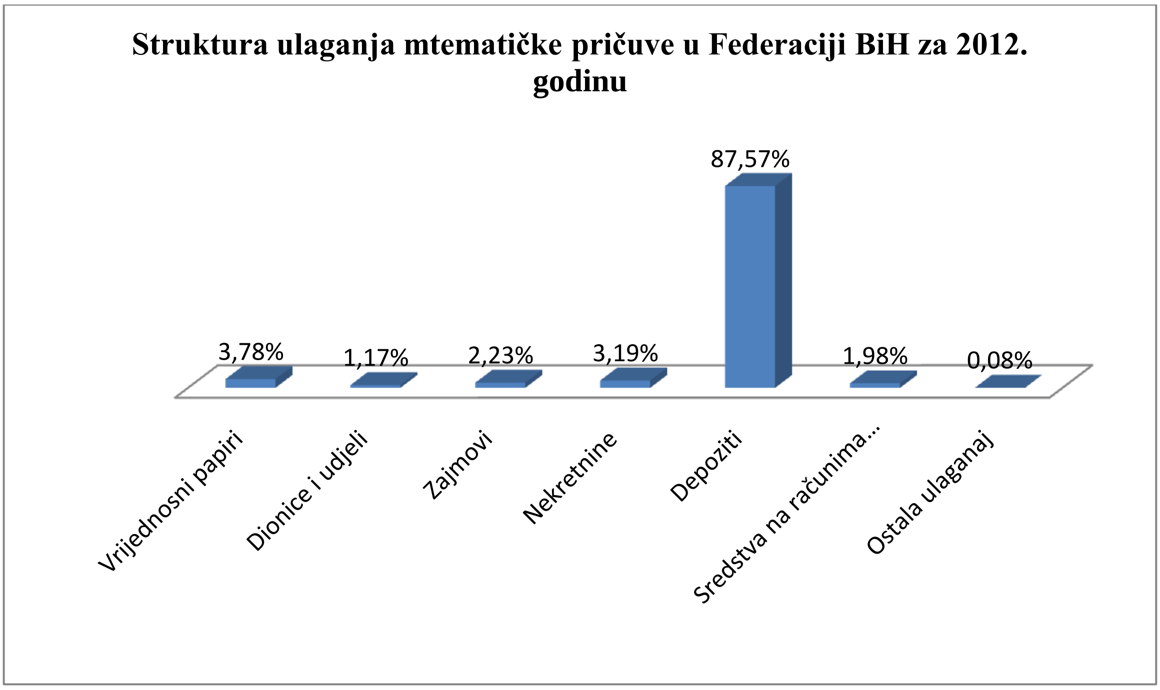
Svako društvo za osiguranje, a posebno društva životnih osiguranja suočavaju se s problemima očuvanja vrijednosti novčanih sredstava. Promjene koje se događaju na svjetskim financijskim tržištima, društvima za osiguranje nameću obvezu ozbiljnog pristupa ulaganju slobodnih novčanih sredstava. Sredstva životnih osiguranja, matematička pričuva, su privremeno slobodna sredstva nastala zbog vremenske nepodudarnosti naplate premije i dospijeća ugovora o osiguranju. Budući su životna osiguranja vezana za srednji i dugi rok tako su sredstva matematičke pričuve koja se ulažu i troše vezana za duži vremenski interval.

Autori radova vezanih za analizu financijskog tržišta u Bosni i Hercegovini, danas, suglasni su da je financijsko tržište nerazvijeno i plitko. Jedan od razloga je u tome što glavni emitenti, banke i poduzeća posluju u vrlo nepovoljnim poslovnim uvjetima i nepovoljnom poslovnom okruženju.

Za osiguravatelje najznačajnija slobodna sredstva za plasman na financijskom tržištu su sredstava premije životnih osiguranja, odnosno sredstva matematičke pričuve. Matematičku pričuvu čine sredstva koja su dugoročna i kao takva se mogu plasirati na tržišta kapitala.

Plasmani sredstava matematičke pričuve osiguravatelja života u Bosni i Hercegovini nemaju određenu razinu disperzije u smislu zastupljenosti različitih vrsta ulaganja, u najširem smislu riječi.

Grafikon 11. Struktura ulaganja matematičke pričuve u Federaciji BiH u 2012. godini



Izvor: Izradio Autor

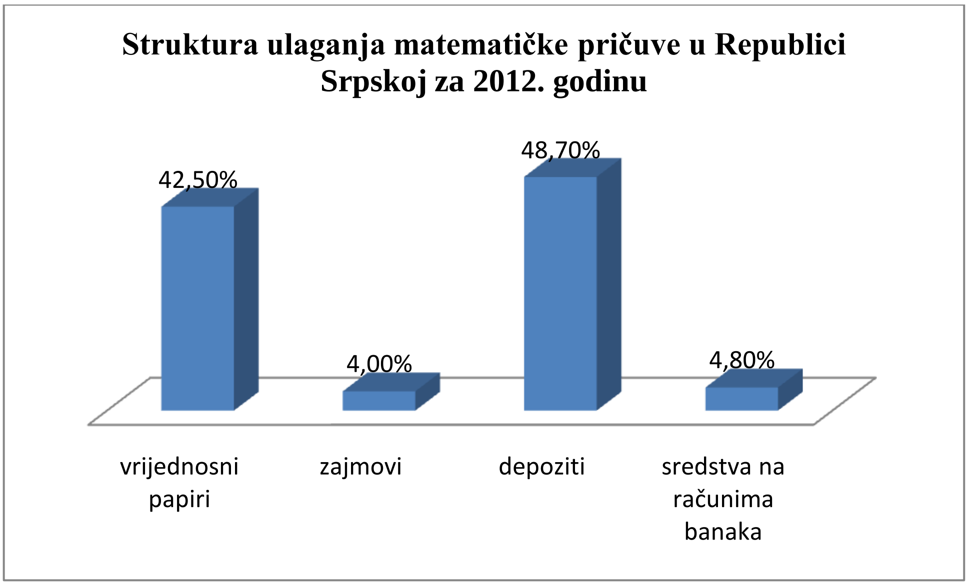
Sa grafikona je jasno vidljiva sruktura ulaganja matematičke pričuve u Federaciji Bosne i Hercegovine. Karakteristika ulaganja matematičke pričuve u Federaciji BiH jeste koncentriranost ulaganja matematičke pričuve u depozote i to 87,57% ukupnog iznosa pričuve.

Struktura ulaganja u Federaciji je zadnjih pet godina slična prema zastupljenosti pojedinih derivata u ulaganju matematičke pričuve. U 2008. godini 79% matematičke pričuve je bilo uloženo u depozite, ostalih 21% u vrijednosne papire, dionice, zajmove, nekretnine i sredstva na računima banaka.

Godinu dana kasnije raste postotak ulaganja u depozite na 82%, u 2010. godini u depozite je bilo uoženo gotovo 90% matematičke pričuve. Potom se bilježi mali pad ulaganja u depozite za par postotaka do 2012. godine.

Slična je struktura ulaganja matematičke pričuve i u Republici Srpskoj gdje također dominira ulaganje u depozite, ali u malo manjem postotku.

Grafikon 12. Struktura ulaganja matematičke pričuve u RS-u u 2012. godini



Izvor: Izradio Autor

Uložena matematička pričuva u Republici Srpskoj je koncentrirana u depozite i vrijednosne papire oko 90% njenog ostavrenog iznosa u 2012. godini.

Posebnost osiguravatelja života kao investitora jeste u tome što podrazumijeva visoko zahtijevanu razinu sigurnosti ulaganja. Struktura portfelja osiguravatelja mora biti konstruirana tako, da ni u jednom trenutku, ne ugrožava vrijednost i solventnost osiguravatelja u izvršenju obveza prema osiguranicima. Sigurnost poslovanja osiguravatelja života predstavlja jamstvo zaštite osiguranika u smilu ispunjenja svih ugovorenih polica.

Od 2008. godine do 2012. godine struktura ulaganja matematičke pričuve u Republici Srpskoj je slična ovoj istaknutoj u 2012. godini. U 2009., 2010. i 2011. godini ulaganje u vrijednosne papire je dominiralo u odnosu na depozite, a u 2012. godini dogodila se rotacija ulaganja u korist depozita.

Postoji nekoliko teorija i modela optimizacije portfelja ulaganja. Najčešće korišteni, mnogi će autori reći i najpotpuniji, najznačajniji je Markowitzev model optimizacije portfelja. Model ima za cilj maksimizirani očekivani prinos uz minimalni očekivani rizik njegova ostvarenja. Očekivani prinos jednak je sumi pojedinačnih prinosa svih vrijednosnih papira koji su u strukturi portfelja sa njihovim vjerojatnostima zastupljenosti u portfelju. Pretpostavka Markowitzevog modela optimizacije portfelja je da prinosi uloženih sredstava prate normalnu razdiobu. Stoga je urađeno testirane distribucija vjerojatnosti pojedinog ulaganja unutar portfelja prema normalnoj distribuciji vjerojatnosti i rezultati testa govore o nepodudarnosti.

Tablica 8. Test normalnosti razdiobe zastupljenosti pojedinog vrijednosnog papira u portfelju osiguravatelja života u FBiH

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Kurtosis	
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error
VAR00001	7	,00	,88	,1429	,32338	6,968	1,587
Valid N (listwise)	7						

Izvor: Izradio Autor

Statistički koeficijent Kurtosis ima vrijednost 6,968 (veći od nula) što znači da je distribucija izdužena (leptokurtična), dakle odstupa od normalne distribucije.

Značajnost odstupanje testirane distribucije od normalne određuje se na nekoliko načina. Jedan od njih je usporedba omjera Kurtosis koeficijenta i standardne greške sa vrijednosti 1,96 ili 2,58 (razina signifikantnosti 5% ili 1%).

U ovom primjeru je: $\frac{Kurstosiskoeficijent}{s\tan dardnagreška} = \frac{6,968}{1,587} = 4,391$ što je veće od 2,58 pa možemo zaključiti da empirijska distribucija značajno odstupa od normalne distribucije.

Ako je dobro diversificiran portfelj njegova distribucija očekivanog prinosa teži normalnoj distribuciji.

Uz ovakvu razdiobu vjerojatnosti zastupljenosti pojedinog vrijednosnog papira, gotovo je nemoguće očekivati normalnu razdiobu očekivanih prinosa.

Očekivani prinos portfelja matematički se izražava formulom $E_{rp} = \sum_{i=1}^{n} E_{ri} \cdot p_i$, pri čemu je

E_{rp} – očekivani prinos portfelja

E_{ri} – vjerojatnost ostvarenja prinosa na *i*-ti vrijednosni papir

p_i – vjerojatnost zastupljenosti vrijednosnog papira *i* u ukupnom portfelju.

Promatrajući strukturu portfelja u Federaciji BiH uz veliku vjerojatnost p_i za depozite (u 2012. godini p_i = 0,8757) i uz manji prinos po depozitu u odnosu na ostale vrijednosne papire u portfelju, osiguravatelji života su ostvarili određeni prinos koji im je jamčio određenu likvidnost i solventnost.

Proveden je test normalnosti vjerojatnosti zastupljenosti vrijednosnih papira u portfelju osiguravatelja života u Republici Srpskoj

Tablica 9. Test normalnosti razdiobe zastupljenosti pojedinog vrijednosnog papira u portfelju osiguravatelja života u RS

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Kurtosis	
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error
VAR00001	4	,04	,49	,2500	,23923	-5,662	2,619
Valid N (listwise)	4						

Izvor: Izradio Autor

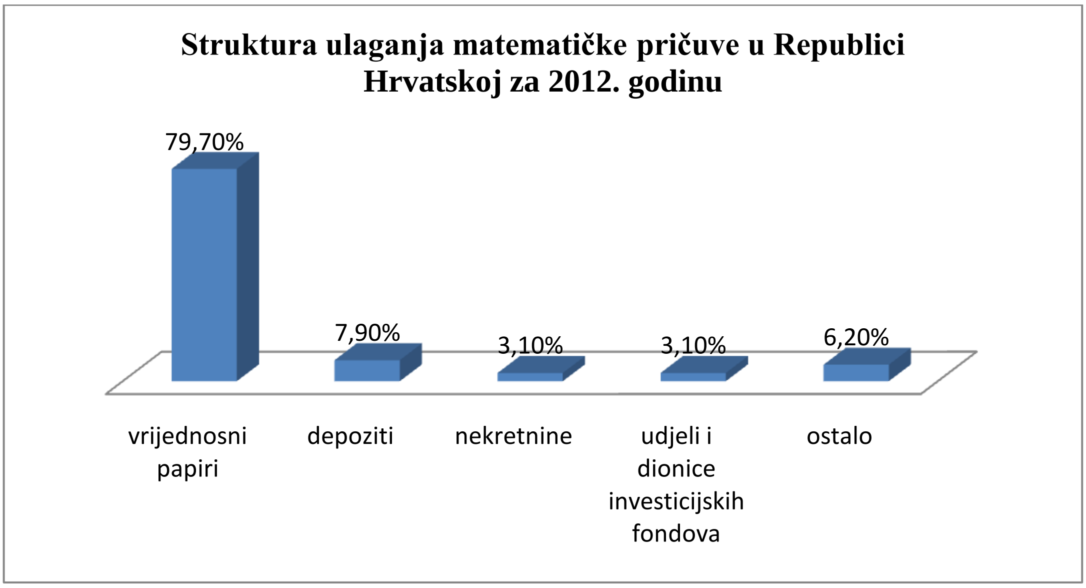
Statistički koeficijent Kurtosis ima vrijednost ($-5{,}662$) , negativan (manji od nula) što znači da je distribucija spljoštena u odnosu na normalnu (platikurtična).

Značajnost testa normalnosti je: $\frac{Kurstosiskoeficijent}{s\tan dardnagreška}=\frac{5{,}662}{2{,}619}=2{,}162$

Što je veće od 1,96 pa zaključujemo da empirijska distribucija značajno odstupa od normalne. U Republici Srpskoj imamo spljošteniju distribuciju vjerojatnosti u odnosu na normalnu i pri tome udio vjerojatnosti vrijednosnih papira i depozita ima približno istu vjerojatnost zastupljenosti u portfelju pa je ovdje pretpostavka očekivanog prinosa drugačija nego što je slučaj u Federaciji. Ovdje će rizik budućih prinosa ovisiti o disperziji prinosa očekivane vrijednosti. Što je veća disperzija veća je vjerojatnost pada prinosa ispod očekivane razine i time je veća rizičnost portfelja.

Pogledamo li strukturu ulaganja matematičke pričuve osiguravatelja života u Republici Hrvatskoj vidi se izvjesna razlika u zastupljenosti pojedinih vrsta ulaganja. Grafički prikaz strukture ulaganja vidi se na grafikonu.

Grafikon 13. Struktura ulaganja matematičke pričuve u Republici Hrvatskoj u 2012. godini



Izvor: Izradio Autor

Test normalnosti distribucije strukture ulaganja u Republici Hrvatskoj potvrđuje nepodudarnost sa normalnom distribucijom sa velikim Kurstosi koeficijentom (4,93), koeficijent pozitivan što znači da je distribucija izdužena u odnosu na normalnu, maksimum joj je puno veći nego maksimum normalne distribucije.

Tablica 10. Test normalnosti strukture portfelja RH – 2012 godina

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Kurtosis	
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error
VAR00001	5	,03	,80	,2000	,33437	4,923	2,000
Valid N (listwise)	5						

Izvor: Izradio Autor

U Republici Hrvatskoj u strukturi ulaganja matematičke pričuve dominiraju vrijednosni papiri za razliku u BiH gdje su dominantni depoziti.

Financijsko tržište u Republici Hrvatskoj je ipak djelom razvijenije nego u Bosni i Hercegovini pa stoga ne čudi ovakav omjer ulaganja u vrijednosne papire.

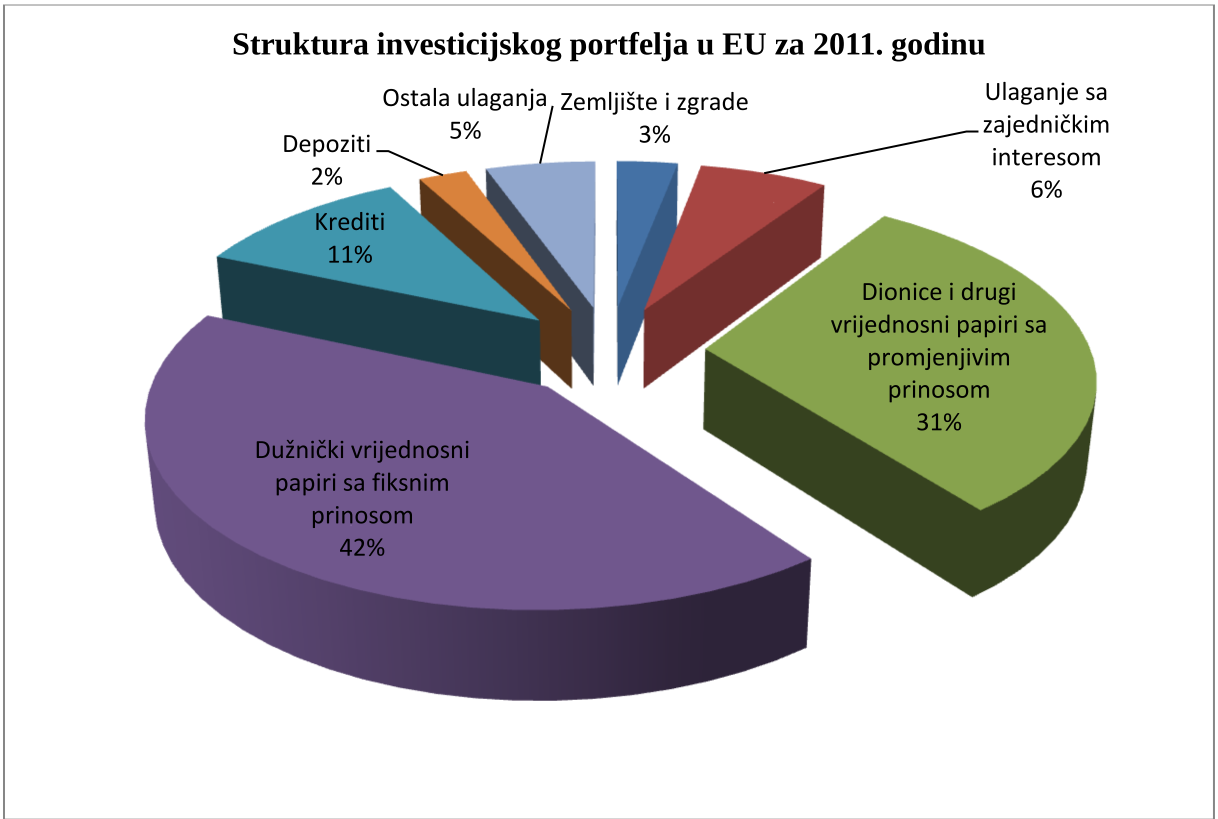
Kada bismo ovaj postotak matematičke pričuve koji je uložen u vrijednosne papire raščlanili pojedinačno po vrstama vrijednosnih papira slika bi svakako bila drugačija i distribucija vjerojatnosti udjela u portfelju bi tada približno slijedila normalnu razdiobu. U tom slučaju se očekuje da i razdioba očekivanog prinosa slijedi normalnu distribuciju.

Značajnost testa normalnosti pomoću omjera Kurtosis koeficijenta i standardne greške u ovom primjeru je:

$$\frac{Kurstosiskoeficijent}{s\tan dardnagreška} = \frac{4{,}923}{2{,}000} = 2{,}462$$ što je veće od 1,96 pa zaključujemo da razdioba ne odgovara normalnoj na razini signifikantnosti 5%.

Struktura investicijskog portfelja životnih osiguranja u zemljama Europske unije razlikuje se u odnosu na strukturu u RH i onu u BiH.

Grafikon 14. Struktura investicijskog portfelja životnih osiguranja u EU – 2011. godine



Izvor: Izradio Autor

Struktura investicijskog portfelja zemalja EU u 2011. godini bitno se razlikuje u odnosu na strukturu investicijskog portfelja životnih osiguranja u RH i u BiH.

Od sumarne strukture investicijskog portfelja zemalja EU pojedinačno malo odstupaju pet zemalja koje u strukturi portfelja imaju više od 20% ulaganja u depozite. To su: Bugarska (28%), Cipar (27%), Estonija (21%), Mađarska (21%), Latvija (24%). Svi ovi udjeli su daleko od udjela u depozite koje imaju društva za osiguranje u BiH.

U strukturi investicijskog portfelja životnih osiguranja zemalja EU krediti su zastupljeni sa 11%. Ovdje valja izdvojiti Njemačku koja ima približno 46% portfelja investiranog u kredite, uključujući kredite za koje jamči hipoteka.

Testirajući distribuciju strukture portfelja osiguravatelja u EU prema normalnoj distribuciji analiza daje Kurtosis koeficijent približno nula (0,16) što vodi do zaključka da se ova distribucija može smatrati približno normalnom.

Tablica 11. Test normalnosti strukture investicijskog portfelja zemalja EU – 2011. godina

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Kurtosis	
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error
VAR00001	7	2,40	41,80	14,2857	15,49693	,160	1,587
Valid N (listwise)	7						

Izvor: Izradio Autor

Značajnost odstupanje testirane distribucije od normalne u ovom primjeru je

$$\frac{Kurstosiskoeficijent}{s\tan dardnagreška} = \frac{0{,}160}{1{,}587} = 0{,}1008$$

što je manje od 1,96 pa prema ovom omjeru možemo zaključit podudarnost sa normalnom distribucijom na razini signifikantnosti 5%.

Ova normalnost distribucije strukture investicijskog portfelja jamči normalnost distribucije prinosa na uložena sredstva.

7.6. Razvijenost koncepta upravljanja tržišnim rizici u društvima za osiguranje života i obujam matematičke pričuve

Tržišni rizik je osjetljivost financijskog instrumenta ili portfelja na promjenu tržišnih parametara. Rizik promjene kamatne stope (uključujući varijacije u opsegu kreditnog tržišta) predstavlja vjerojatnost gubitka koji je posljedica kretanja kamatnih stopa i njihova utjecaja na buduće novčane tijekove. Upravljanje kamatnim rizikom je posebice bitno kod životnih osiguranja u kojima osiguravatelj mora npr. 30-godišnju premiju ulagati uz stabilne prinose. Rizik dionica, nekretnina i ostale imovine jeste rizik od gubitka koji je posljedica kretanja tržišne vrijednosti dionica i druge imovine. Osiguravatelj može biti izložen nepovoljnim ekonomskim utjecajima do te mjere da se tržišne vrijednosti dionica, nekretnina i druge imovine ne kreću u skladu s planiranom likvidnosti osiguravatelja. Valutni rizik je rizik gubitka, koji je posljedica kretanja tečaja koji pogađa pozicije aktive i obveze iskazane u stranoj valuti što može imati nepovoljan utjecaj na osiguravatelja. Povezani kreditni rizik uočljiv je pri određivanju izloženosti tržišnom riziku što rezultira time da bi osiguravatelj mogao povećati izloženost kreditnom riziku druge strane.

I ne samo to, tržišni rizik sadrži opći tržišni rizik (pri svim ulaganjima) i specifični tržišni rizik (pri pojedinim ulaganjima). Tržišni rizik također uključuje izloženost nepredviđenim kretanjima financijskih varijabli ili kretanjima stvarne ili naznačene promjenjivosti cijene imovine.

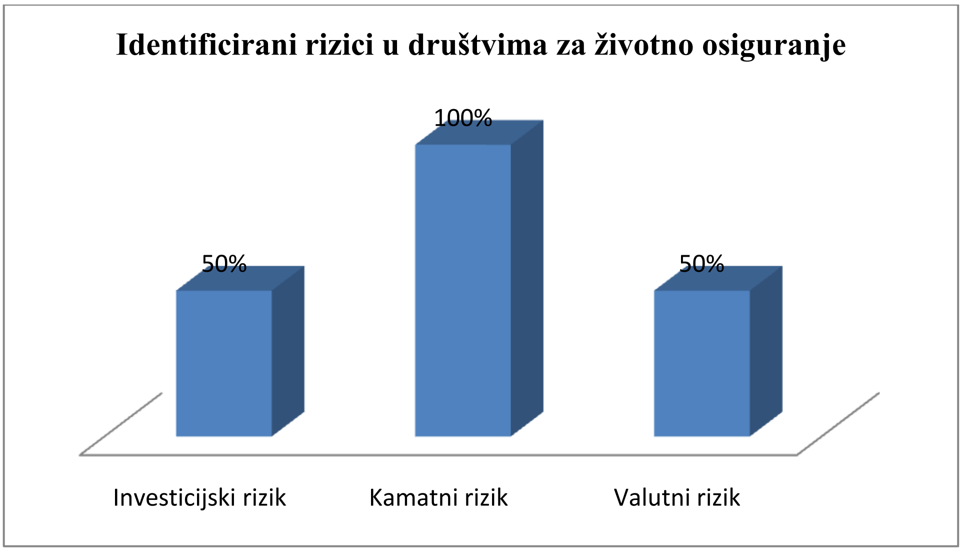
Stoga, osiguravatelj bi trebao biti sposoban izmjeriti svoju izloženost tržišnom riziku kroz rizične faktore (primjerice, kroz kamatne stope, dionice i valute) i kroz čitav portfelj. Radi mjerenja izloženosti faktorima tržišnog rizika osiguravatelj mora postaviti odgovarajući oblik optimizacije portfelja kada su u pitanju promjene tržišnih parametara.

Koncept upravljanja rizikom se razlikuje zavisno od poslovne linije, u smislu prirode proizvoda i primjerene strategije investiranja. Korištenje posebnih segmenata omogućava osiguravatelju da investicijsku strategiju i strategiju upravljanja rizikom definira u skladu sa svojim poslovnim linijama i strategijama. Koncept upravljan rizikom će ovisiti o dostupnom kapitalu, fleksibilnosti koju on pruža, uvjetima u kojima osiguravatelj posluje i kretanjima na financijskim tržištima gdje osiguravatelj plasira slobodna sredstva.

Istraživanje tržišta životnih osiguranja u Bosni i Hercegovini u kontekstu identifikacije i upravljanja rizicima pokazalo je da postoji prepoznata potreba za identifikacijom i upravljanjem rizicima.

Društva za osiguranje u BiH identificiraju i ističu tri temeljna rizika i to: investicijski, kamatni i valutni rizik. Neka društva identificiraju sva tri rizika neka pak dva od navedenih. Rezultati istraživanja prikazani su na grafikonu kako slijedi.

Grafikon 15. Investicijski rizik i tržišni rizici u društvima za životno osiguranje u BiH

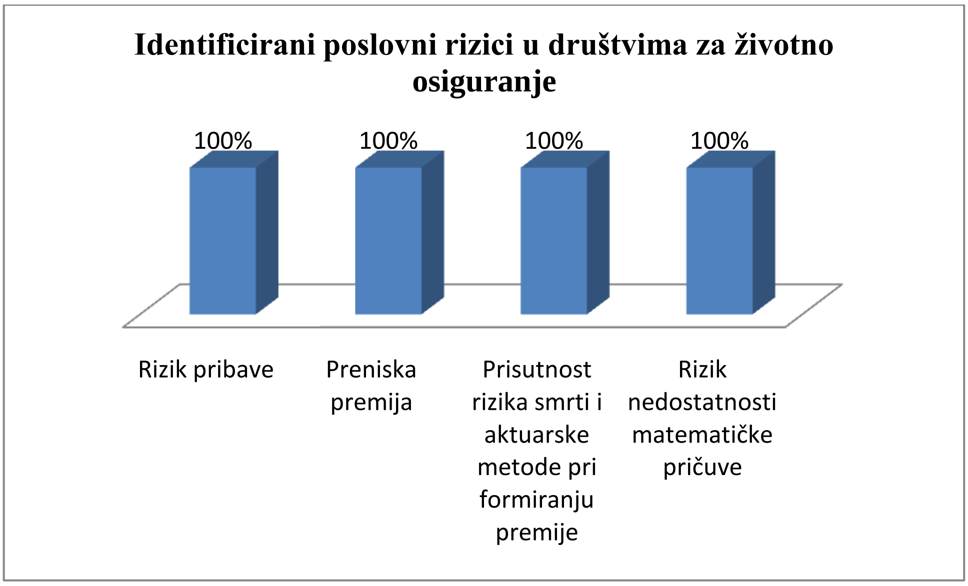


Izvor: Izradio Autor

Prema rezultatima istraživanja da se zaključiti kako sva društva identificiraju kamatni rizik i svjesni su njegovog utjecaja na uložena sredstva matematičke pričuve, a potom i na likvidnost samog društva.

Kada su u pitanju rizici pribave i operativni rizici kao dio poslovnih rizika osiguravatelji života u BiH ih identificiraju i pokušavaju upravljati njima. Koje rizike iz navedenih grupa ističu osiguravatelji u BiH prikazano je na slijedećem grafikonu.

Grafikon 16. Rizici pribave i operativni rizici u društvima za osiguranje u BiH



Izvor: Izradio Autor

Prema istraživanju sva društva za životno osiguranje identificiraju rizik pribave, rizik preniske ili nedostatne premije, prisutnost rizika smrti i aktuarskih metoda pri formiranju premije i svakako rizik nedostatnosti matematičke pričuve.

Rizik pribave aktivira se kada se pri obračunu premije nisu adekvatno pratile promjene vezane za dob i spol osigranika. Osiguravtelji u BiH su svjesni tog rizika. Rizik pribave je mjerljiv i može se njime upravljati.

Preniska premija određuje u budućnosti prenisku matematičku pričuvu što može rezultrati kroz nemogućnost ispunjavanja preuzetih obveza od strane osiguravatelja.

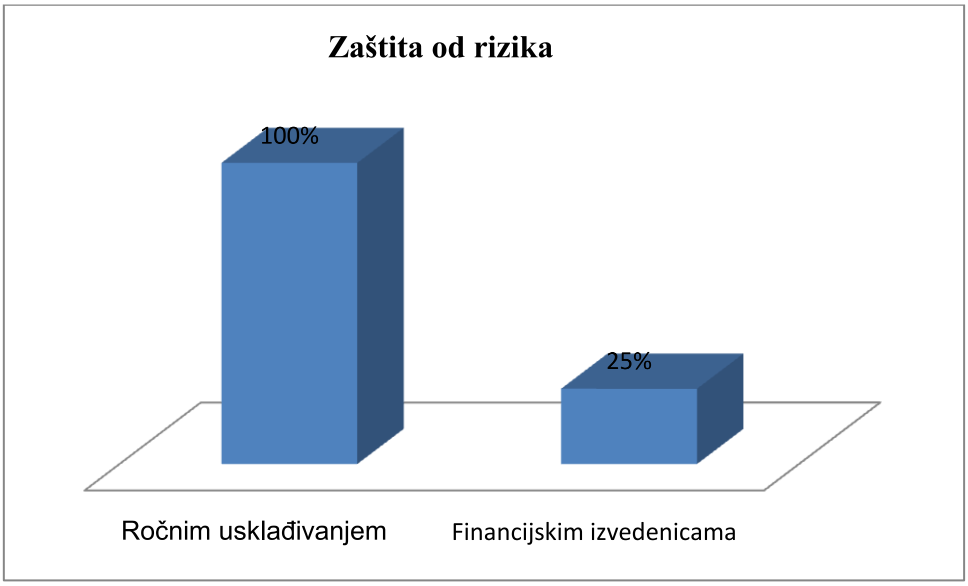
Neidentificiranost rizika smrti i rizika odabira aktuarskih metoda pri formiranju tarifa znači formiranje preniske ili previsoke premije što u oba slučaja dovodi u pitanje poslovanje osiguravatelja.

Matematička pričuva se procijenjuje formiranjem premije osiguranja. Procjenjujući matematičku pričuvu aktivira se rizik nedostatnosti matematičke pričuve. Posljedice aktivnosti tog rizika se ogledaju u podcjenjenosti matematičke pričuve, odnosno pasive ili pak precijenjene imovine osiguravatelja.

Dakle, svih ovih rizika su osiguravatelji u BiH svjesni i pokušavaju ih kontrolirati i njima upravljati.

Kako osiguravatelji upravljaju i štite se od spomenutih rizika vidljivo je na slijedećem grafikonu.

Grafikon 17. Zaštita od rizika



Izvor: Izradio Autor

Sva društva koja se bave životnim osiguranjima štite se od rizika ročnim usklađivanjem, a njih približno četvrtina ističe i financijske izvedenice kao mjeru zaštite od rizika.

Ovakva zaštite od rizika posljedica je strukture ulaganja matematičke pričuve, odnosno nerazvijenosti financijskog tržišta i zakonskih regultiva o ulaganjima.

8. ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

Životna osiguranja dio su sustava osiguranja i izravno su vezana za financijsko tržište zemlje u kojoj posluju. Posebna karakteristika životnih osiguranja je visina matematičke pričuve koju akumuliraju i plasiraju na financijska tržišta kako bi u svakom trenutku bila osigurana likvidnost i solventnost.

8.1. Sažetak rezultata provedenog istraživanja i rasprava u kontekstu postavljenih hipoteza

Društva za osiguranje u BiH jako osjećaju slabosti i nerazvijenost financijskog tržišta i gospodarstva u cijelosti.

Prvi korak u oblikovanju matematičke pričuve, odnosno premije životnih osiguranja jesu aktuarske tablice. Temelj aktuarskih tablica su tablice smrtnosti i uz odabranu kamatnu stopu izvedeni komutativni brojevi. Prema istraživanju osiguravatelji života u Bosni i Hercegovini koriste tablice smrtnosti iz 1982. godine, što bi svakako trebalo ažurirati i mijenjati jer mnoga istraživanja su pokazala da se produžio životni vijek u oba spola. Produženje životnog vijeka mijenja vjerojatnost smrtnosti i vjerojatnost doživljenja, a time izravno utječe na veličinu komutativnih brojeva. Sve skupa ima za posljedicu neadekvatan iznos neto premije, a time i neadekvatno oblikovanu matematičku pričuvu.

Drugim riječima prihvaća se prva pomoćna hipoteza.

Opstati u suvremenim uvjetima poslovanja znači maksimalno se prilagoditi potrošačima, a to za osiguranje znači prilagoditi se zahtjevima osiguranika. Društva za osiguranje svoju prilagodbu vrše kroz različite modele i proizvode osiguranja. Definirajući novi model, odnosno proizvod osiguranja, ekvivalentno se definiraju i svi uvjeti počevši od načina uplata premija, roka police osiguranja, načina isplate osiguranog slučaja i svih ostalih pojedinosti koje prate svaki proizvod osiguranja. Svi ti uvjeti izravno ili neizravno utječu na prihvatljivost proizvoda na tržištu, ali ne manje bitno i na oblikovanje matematičke pričuve na čemu je naglasak u ovom radu. Osiguravatelji života u Bosni i Hercegovini imaju približno 92% osiguranja života u ukupnoj premiji životnih osiguranja. Dodatna osiguranja uz životno osiguranje čine približno 8% ukupne premije životnih osiguranja. Renti kao oblika životnih osiguranja gotovo nema. U skupini osiguranja života najzastupljenija su mješovita osiguranja za slučaj smrti ili doživljenja.

Usporedbom strukture premije životnih osiguranja u Bosni i Hercegovini i Republici Hrvatskoj vidljiva je razlika ali ne drastična. U Republici Hrvatskoj postoji oblik životnog osiguranja kod kojeg osiguranik preuzima investicijski rizik (oko 6%), osiguranje za slučaj vjenčanja ili rođenja i rentno osiguranje (oko 0,33%). Koliko je sustav osiguranja u Republici Hrvatskoj razvijeniji od sustava osiguranja u BiH toliko su i modeli, odnosno proizvodi osiguranja raznovrsniji. Matematička pričuva je dio neto premije životnih osiguranja i u tom slučaju izravna je posljedica strukture premije prema obliku police osiguranja. To znači opravdanost postavljene druge radne hipoteze odnosno zastupljenost pojedinih modela i proizvoda životnih osiguranja određuju veličinu matematičke pričuve.

Obveza svakog osiguranika je premija koju osiguranik izvršava prema društvu za osiguranje. Uvjeti u kojima osiguranici sklapaju police osiguranja, s jedne strane i oni u kojima osiguravatelji posluju s druge strane traže od osiguravatelja prilagođavanje perioda uplata premije osiguranja. Razlozi prilagođavanja perioda uplate premije leže u ostvarenju efikasnije naplate neto premije. Istraživanje je potvrdilo pretpostavku sadržanu u trećoj radnoj hipotezi. Struktura perioda uplata premije je takva da je gotovo 90% uplata mjesečno, a samo 10% godišnje. Osim prilagodbe perioda uplata, osiguravatelji se prilagođavaju dopuštajući obročno plaćanje premije. Uplate premija kod osiguranja kapitala su uglavnom fiksne, a u onom dijelu kojem se pojavljuju u varijabilnim iznosima su razdijeljene za mješovito osiguranje (40%) i za slučaj smrti (60%). Usitnjenost perioda uplata premije usložnjava oblikovanje matematičke pričuve i dodatno aktivira rizik plasmana matematičke pričuve.

Složenost zakonskih regulativa dodatno opterećuje osiguravatelje i njihovo poslovanje. U Bosni i Hercegovini entitetski je reguliran sektor osiguranja, odnosno osiguravatelji u Federaciji BiH podliježu zakonskim regulativama koje propisuje Federacija BiH, a osiguravatelji u Republici Srpskoj podliježu zakonskoj regulativi Republike Srpske. Sukladno zakonskom okviru u BiH djeluju dvije entitetske agencije za osiguranje i Agencija za nadzor osiguranja u Bosni i Herecegovini kao krovna institucija za superviziju osiguranja. Osiguravatelji života su posebno osjetljivi na zakonske regultive jer su izravno vezani za zakoske propise kojih se trebaju držati pri formiranju tarifa, odnosno oblikovanja matematičke pričuve. U drugom koraku je plasman matematičke pričuve gdje su osiguravatelji ponovo kontrolirani zanonskom regulativom prema kojoj kreiraju strukturu ulaganja matematičke pričuve. Osiguravatelji u BiH, neposredno nakon rata (1992.-1995.) nisu imali dopuštenje ulagati sredstav izvan financijskog tržišta Bosne i Hercegovine, što je itekako utjecalo na strukturu portfelja, kao i nerazvijenost financijskog tržišta u BiH.

Novost u zakonskoj regulativi u BiH je to što osiguravatelji života sredstva matematičke pričuve sada mogu ulagati izvan Bosne i Hercegovine i to u:

- Vrijednosne papire čiji je izdavač članica Europske unije ili njihova centralna banka, odnosno vrijednosne papire za koje garantira neki od navedenih subjekata,
- Obveznice i druge dužničke vrijednosne papire kojima se trguje na organiziranom tržištu vrijednosnih papira u zemljama članicama Europske unije,
- Dionice sa kojima se trguje na organiziranom tržištu vrijednosnih papira u zemljama članicama Europske unije.

Dakle, društvo će imati razvijen sustav životnih osiguranja ako i samo ako ima razvijen financijski sustav i financijsko tržište gdje će osiguravatelji života moći poslovati u cilju pozitivne likvidnosti.

Promjene koje se događaju na svjetskom financijskom tržištu, društvima za osiguranje nameću obvezu ozbiljnog pristupa ulaganju slobodnih novčanih sredstava. Sredstva životnih osiguranja, matematička pričuva, su privremeno slobodna sredstva nastala zbog vremenske nepodudarnosti naplate premije i dospijeća ugovora o osiguranju. Budući su životna osiguranja vezana za duži rok tako su sredstva matematičke pričuve koja se ulažu i troše vezana za duži vremenski interval.

Plasmani sredstava matematičke pričuve osiguravatelja života u Bosni i Hercegovini nemaju određenu razinu disperzije u smislu zastupljenosti različitih vrsta ulaganja, u najširem smislu riječi.

Karakteristika ulaganja matematičke pričuve u Federaciji BiH jeste koncentriranost ulaganja matematičke pričuve u depozite i to 87,57% ukupnog iznosa pričuve. U Republici Srpskoj struktura ulaganja je malo drugačija, približno 50% sredstava je uloženo u depozite, a oko 40% u vrijednosne papire koji su u 2012. godini kotirali na financijskom tržištu u BiH.

Ako je dobro diversificiran portfelj njegova distribucija očekivanog prinosa teži normalnoj distribuciji.

Test normalnosti razdiobe zastupljenosti pojedinog vrijednosnog papira u portfelju osiguravatelja života u Federaciji i Republici Srpskoj pokazuje odstupanje od normalne razdiobe.

U Federaciji statistički koeficijent Kurtosis ima vrijednost 6,968 (veći od nula) što znači da je distribucija izdužena (leptokurtična), dakle odstupa od normalne distribucije.

U Republici Srpskoj statistički koeficijent Kurtosis ima vrijednost (– 5,662) , negativan je (manji od nula) što znači da je distribucija spljoštena u odnosu na normalnu (platikurtična).

U oba entiteta struktura portfelja odstupa od normalne distribucije. Analizom strukture portfelja osiguravatelja života u Republici Hrvatskoj test normalnost pokazao je podudarnost sa normalnom razdiobom na razini signifikantnosti 10%.

Struktura portfelja osiguravatelja života u zemljama Europske unije podudarna je sa normalnom distribucijom na razini signifikantnosti 5%.

Osiguravatelji života u Bosni i Hercegovini identificiraju rizike koji sudjeluju u oblikovanju matematičke pričuve i rizike vezane uz plasman sredstava matematičke pričuve. Svi osiguravatelji života prate rizik pribave, rizik preniske premije, rizik nedostatnosti matematičke pričuve i rizik smrti uključujući aktuarske metode formiranja premije. Identificirani rizici vezani za plasman matematičke pričuve kod osiguravatelja života u Bosni i Hercegovini su: kamatni rizik, valutni rizik i investicijski rizik. Svi osiguravatelji se štite od rizika ročnim usklađivanjem, a oko 25% osiguravatelja kao zaštitu od rizika koristi još i financijske izvedenice.

Prema svim pokazateljima kojima je rezultiralo istraživanje postavljene hipoteze su utemeljene i nalaze potvrdu u rezultatima istraživanja.

Ovim radom se pokušalo ukazati i na potrebu aktivnijeg pristupa životnim osiguranjima s naglaskom na njihov osnovni segment, a to je matematička pričuva. Poseban problem osiguravatelja života u Bosni i Hercegovini predstavlja transparentnost i dostupnost baze podataka.

Razvijati životno osiguranje u BiH znači pratiti i koristiti iskustva osiguravatelja života razvijenih zemalja te stvarati preduvjete za efikasnije poslovanje i brži put do približavanja sustavima životnih osiguranja Europske unije.

U promjenjivim i neizvjesnim uvjetima poslovanja nameće se potreba primjene naprednih metoda procjene rizika uz istovremeno udovoljavanje zahtjevima stabilnosti i profitabilnosti poslovanja. Za uspješno praćenje utjecaja poslovnih rizika na oblikovanje i plasman matematičke pričuve pored promjena unutar samih društava za životna osiguranja nužno je razviti podržavajući instituconalni okvir koji će uvažavati iskustva i dobre prakse životnih osiguranja u razvijenim zemljama svijeta.

POPIS LITERATURE

1. Alexander, M., Risk Analysis in Finance and Insurance, Library of Congress Cataloging-in-Publication Dana, USA, 2004.
2. Aljinović, Z., Pivac, S., Šego, B.: CIR model i njegova primjena na državne vrijednosnice Republike Hrvatske, Ekonomski pregled, 54 (3-4) 249-287 (2003).
3. AIRMIC, ALARM, IRM, A Risk Management Standards, London, UK, 2002.
4. Achleitner,, P.M., Biebel, J.H., Wichels, D.: Dose WTC Metter for Investment Policy od P/C Insurance Companies, The Geneva Paper of Risk and Insurance, Vol. 27, No. 2, 2002.
5. Agencija za osiguranje BiH, Statistika tržišta osiguranja u BiH 2007., 2008., 2009., 2010.,Sarajevo, 2008., 2009., 2010., 2011.
6. Andrijašević, S., Petranović, V.: Ekonomika osiguranja, Alfa d.d., Zagreb, 1999.
7. Autoritė des Marchės Financiers, Reinsurance Risk Management Guidelines, 2013.
8. Bakić, D., Francišković, D., Financijska i aktuarska matematika, skripta, Osijek, 2013.
9. Briey, E, Varennen, F.: On the Risk on Insurance Liabilities: Debunking Some Common Pitfalls Journal of Risk and Insurance, Vol. 64, No. 4, 1997.
10. Buhlmann, H., Life Insurance With Stochastic Interest Rates, Mathematik, ETH, Zurich,
11. Burton, M., Nesiba, R., Brown, B.: An Introduction to Financial Markets and Institutions, 2009.
12. Centralna banka BiH, Izvješće o financijskoj stabilnosti za 2008., 2009., 2010., godinu, Sarajevo, 2009., 2010.,2011.
13. CEA – Insurers of Europe, The Contribution of the Insurance Sector to Economic Growth and Employment in the EU, Brussels, 2006.
14. CEA Statistics N^0 44: European Insurance in Figures, December 2011.
15. CEA Statistics N^0 45: the Europien Life Insurance Market: Data 2001 – 2010, 21 Feb 2012.
16. CEA Statistics N^0 45: the Europien Life Insurance Market In 2010 – Executive Summary, 21 Feb 2012.
17. CEA Statistics N^0 46: European Insurance in Figures, January 2013.
18. CEA Statistics N^0 47: The European Life Insurance Market in 2011, 05 Feb 2013 – statistical publication.

19. Christian J. Desrochers, John T. Adney, Douglas N. Hertz, Brian G. King, : Life Insurance Modified Endowments: Under Internal Revenue Cod Sections, USA, 2004.
20. Cook, D. O., Cummins, J. D.: Productivity and Efficiency in Insurance: An overview of Issues, Wharton: Working paper, 1994.
21. Ćurak, M., Jakovčević, D.: Osiguranje i rizici, RRIF plus – d.o.o., Zagreb, 2007.
22. Ćurak, M., Lončar, S., Poposki, K.: Insurance Sector Development and Economic Growth in Transition Countries, International Research Journal of Finance and Economics, 2009.
23. Ćurković, M. Ugovor o osiguranju osoba, život-nezgoda-zdravstvo, Inženjerski biro, Zagreb 2009.
24. DasGupta, A.: Fundamentals of Probability: A First Course, Springer Science+Business Media, LLC 2010.
25. David C.M. Diekson, Mary R., Hardy and Howard R.: Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks, Waters Cambridge University Press, 2009.
26. Davis, E. P.: Financial market Activity of Life Insurance Companies and Pension Funds, BIS, Economic papers, No. 21, 1988.
27. Denuit, M., Marechal, X., Pitrebois, S., Walhin, J-F.: Actuarial Modelling of Claim Counts Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems, Library of Congress Cataloging in Publication Dana, 2007.
28. Doffou, A.: New Perspectives in Asset-Liability Management for Insurers. Journal of Business and Behavioral Sciences, Vol. 12, No. 2, 2005.
29. Doherty, N. A., Lamm-Tennant, J.: Lessons from the Financial Crisis on Risk and Capital Management: The Case of Insurance Companies. Journal of Applied Corporate Finance, Vol. 21, Issue 4, 2009.
30. Državni zavod za statistiku Republike Hrvatske: Tablice mortaliteta Republike Hrvatske od 2010. do 2012., Zagreb 2014.
31. International Actuarial Association, Measurement of Liabilities for Insurance Contracts, Ottawa, Canada, 2009.
32. Etienne De Vylder, F.: Life Insurance Theory Actuarial Perspectives, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.
33. Evans, O., Leone, A. M., Gill, M., Hilbers, P.: Macroprudetial Indicators of Financial System Soundess, IMF, Washington, 2000.

34. Geoffrey, B., Watsa, P., Khosrowshahi, B., Duperreault, B., Von Bomhard, N.: International Insurance Society Roundtable on Risk Management after the Crisis, Journal of Applied Corporate Finance, Vol. 21, Issue 4, 2009.
35. Giandomenico, R.: Assets Liability Management in Insurance Companies, Social Science Research Network, 2006.
36. Heller, G. Z.: Generalized Linear Models for Insurance Data, Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York, 2008.
37. Ho, T. S. Y.: Asset/Liability Management and Enterprise Risk Management of an Insurer. Journal of Investment Management, Vol. 3, No. 1, 2005.
38. Hoyt, R. E., Liebenberg, A. P.: The Value of Enterprise Risk Management, 2010, Available at SSRN: **http://ssrn.com/abstract=1440947**
39. Hubener, A., Maurer, R,. Rogalla, R.: Optimal Portfolio Choice with Annuities and Life Insurance for Retired Couples, Finance Department, Goethe University, Frankfurt am Main, Germany, 16 December 2011.
40. International Association of Insurance Supervisors: Guidance paper on Enterprise Risk Management for Capital Adequacy and Solvency Purposes, October 2007.
41. International Association of Insurance Supervisors: Guidance paper on the use of Internal Models for Risk and Capital Management Purposes by Insurers, October 2007
42. International Association of Insurance Supervisors: Standard on Disclosures Concerning Ivestment Risks and Performance for Insures and Reinsurers, October 2005.
43. International Association of Insurance Supervisors: Risk Transfer, Disclosure and Analysis of Finite Reinsurance, October 2006.
44. International Association of Insurance Supervisors: Standard on Disclosures Concerning Technical Risks and Performance for Life Insurers, October 2006.
45. Jakovčević, D., Lovrinović, I.: Životna osiguranja – saturacija ili perspektiva, Osiguranje, hrvatski časopis za teoriju i praksu osiguranja, specijalno izdanje, studeni 2004.
46. Jerončić, M., Aljinović, Z.: Formiranje optimalnog portfelja pomoću Markowitzevog modela uz sektorsku podjelu kompanija, Ekonomski pregled, 62 (9-10) 583-606 (2011).
47. Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M.: Modern Actuarial Risk Theory, Second Edition, Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2008.

48. Kaye, P.: Risk Measurement in Insurance – A Guide to Risk Measurement, Capital Allocation and Related Decision Support Issues, Casualty Actuarial Society, Discussion Paper Program, 2005.
49. Kočović, J., Šulejić, P., Rakonjac Antić, T.: Osiguranje, Ekonomski fakultet u Beogradu, 2010.
50. Kočović, J.: Aktuarske osnove formiranja tarifa u osiguranju lica, Ekonomski fakutet u Beogradu, Beograd, 2004.
51. Koller, M., Life Insurance Risk Management Essentials, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Zurich, 2011.
52. Koller, M.: Stochastic Mmodels in Life Insurance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
53. Kozarić, S.: Rizik menadžment i osiguranje, Ekonomski fakultet Univerziteta u Tuzli, Tuzla, 2010.
54. Kukić, S., Markić, B.: Metodologija društvenih znanosti, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Mostaru, 2006.
55. Lukić, R.: Računovodstvo osiguravajućih kompanija, Centar za izdavačku djelatnost Ekonomskog fakulteta u Beogradu, Beograd, 2008.
56. Maurer, Raimond H. (2003): Institutional investors in Germany: Insurance companies and investment funds, CFS Working Paper, No, 2003/14.
57. Melnikov, A.: Risk Analysis in Finance and Insurance, CRC Press LLC, 2004.
58. Milevsky, M.,A.: The Calculus of Retirement Income, Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance, Cambridge University Press, New York, 2006.
59. Moshe A. Milevsky: The Calculus of Retirement Income, Cambrige, 2006.
60. Mourik, T.: Market Risks in Insurance Companies – description and measurment approach from the perspective of solvency requirments, 2003.
61. Foly, B. J.: Tržište kapitala, Mate, Zagreb, 1993.
62. Njegomir, V., Stojić, D.: Dose Insurance Promote Economic Growth: The Evidence form Ex-Yugoslavia Region, Ekonomska misao i praksa, No. 1, Dubrovnik, 2010.
63. OECD, Assessing the Solvency of Insurance Companies, Paris, 2003.
64. Pagach, D., Warr. R.: The Effects of Enterprise Risk Management on Firm Performance, Working Paper, North Carolina State University, 2008.
65. Pauše, Ž.: Vjerojatnost Informacija – Stohastički procesi, Školska knjiga, Zagreb, 2003.

66. Pešić-Andrijić, M.: Model of Managing Mathematical Reseve of Life Insurance, Acta Economica, god. 9, br. 15/ jul 2011.
67. Pešić-Andrijić, M.: Značaj i djelotvornost životnnog osiguranja na gospodarski razvoj, Zbornik radova Ekonomskog fakulteta, Ekonomski fakultet Pale,Univerzitet u Istočnom Sarajevu, BiH, br. 7, str. 163-167, 2013.
68. Pešić, M.: Ulaganje sredstava životnog osiguranja-bitna sastavnica marketing miksa osiguravajućeg društva, Ekonomski pregled, 56 (7-8) 480-500 (2005).
69. Ramb, F., Scharnagl, M.: Households' Portfolio Structure In Germany, Analysis of Financial Accounts Dana, 1959-2009., European Central Bank, Working paper series N^0 1355, June 2011.
70. Sarapa, N., Teorija Vjerojatnosti, Školska knjiga – Zagreb, 2002.
71. Saunders, A., Cornett, M. M.: Financijske institucije i tržišta, Masmedia, Zagreb, 2006.
72. Schneider, J.C.: Structured Life Insurance and Investment Products for Retail Investors, Genehmigte Dissertation, Bonn, 2011.
73. Schich, S.: Insurance Companies and the Financial Crisis, OECD, 2009.
74. Slud, E.V., Actuarial Mathematics and Life-Tables Statistics, Mathematics Department University of Maryland, College Park, 2006.
75. Šain, Ž., Aktuarski modeli životnih osiguranja, I.dio, Osnove aktuarske matematike, Ekonomski fakultete u Sarajevu, Sarajevo, 2009.
76. Šain, Ž.: Aktuarski modeli životnih osiguranja II. Dio Primjena aktuarske matematike, Ekonomski fakultet Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo, 2010.
77. Šain, Ž., Selimović, J., Međunarodni simpozij – Ubrzane reforme u funkciji održivog razvoja: Društva za osiguranje kao institucionalni investitori – jedan oblik alternative bankarskim kreditima, Revicon d.o.o., Sarajevo, 2011.
78. Teugels, J. L., Sundt, B.: Encyclopedia of Actuarial Science,
79. Vaughan, J.E., Vaughan, T.M.: Osnove osiguranja: Upravljanje rizicima, Mate d.o.o., Zagreb, 2000.

Internet izvori:

80. www.azobih.gov.ba (pristupljeno: 2013. – 2014. godine)
81. www.nados.ba (pristupljeno: 2013. – 2014. godine)
82. www.azors.org (pristupljeno: 2013. – 2014. godine)
83. www.cbbh.ba (pristupljeno: 2013. – 2014. godine)
84. www.fba.ba (pristupljeno: 2013. – 2014. godine)
85. www.abrs.ba (pristupljeno: 2013. – 2014. godine)

POPIS TABLICA, SLIKA I GRAFIKONA

PRILOZI

PRILOG 1

Tablice mortaliteta Republike Hrvatske 2010. – 2012.

Starost x	*Skupine živih* V_x	*Skupine umrlih* M_x	*Sirove vjerojatnosti smrti* q_x'	*Izglađene vjerojatnosti smrti* q_x	*Vjerojatnosti doživljenja* p_x	*Broj živih* l_x	*Broj mrtvih* d_x	*Zbroj brojeva živih* N_x	*Očekivano trajanje života* e_x
					Muškarci				
0	43 600	127	0,002913	0,002913	0,997087	100 000	291	7 443 829	73,94
1	44 832	13	0,000290	0,000290	0,999710	99 709	29	7 343 829	73,15
2	44 671	9	0,000201	0,000201	0,999799	99 680	20	7 244 121	72,17
3	43 321	7	0,000162	0,000162	0,999838	99 660	16	7 144 441	71,19
4	42 490	5	0,000118	0,000118	0,999882	99 644	12	7 044 781	70,20
5	42 997	4	0,000093	0,000054	0,999946	99 632	5	6 945 138	69,21
6	42 533	2	0,000047	0,000067	0,999933	99 627	7	6 845 506	68,21
7	41 295	4	0,000097	0,000077	0,999923	99 620	8	6 745 879	67,22
8	41 100	5	0,000122	0,000110	0,999890	99 612	11	6 646 259	66,22
9	41 836	6	0,000143	0,000114	0,999886	99 601	11	6 546 647	65,23
10	43 671	7	0,000160	0,000142	0,999858	99 590	14	6 447 046	64,24
11	45 666	8	0,000175	0,000157	0,999843	99 576	16	6 347 456	63,25
12	47 457	9	0,000190	0,000184	0,999816	99 560	18	6 247 880	62,25
13	49 866	10	0,000201	0,000202	0,999798	99 542	20	6 148 320	61,27
14	51 766	12	0,000232	0,000257	0,999743	99 522	26	6 048 779	60,28
15	51 186	19	0,000371	0,000322	0,999678	99 496	32	5 949 257	59,29
16	49 411	18	0,000364	0,000393	0,999607	99 464	39	5 849 761	58,31
17	49 400	23	0,000466	0,000475	0,999525	99 425	47	5 750 297	57,34
18	49 266	30	0,000609	0,000548	0,999452	99 378	54	5 650 872	56,36
19	50 613	29	0,000573	0,000610	0,999390	99 323	61	5 551 495	55,39
20	52 225	40	0,000766	0,000667	0,999333	99 263	66	5 452 172	54,43
21	51 969	41	0,000789	0,000714	0,999286	99 196	71	5 352 909	53,46
22	53 355	42	0,000787	0,000752	0,999248	99 125	75	5 253 713	52,50
23	54 354	38	0,000699	0,000741	0,999259	99 051	73	5 154 588	51,54
24	54 590	44	0,000806	0,000739	0,999261	98 978	73	5 055 537	50,58
25	56 186	38	0,000676	0,000813	0,999187	98 904	80	4 956 559	49,61
26	58 571	62	0,001059	0,000827	0,999173	98 824	82	4 857 655	48,65
27	59 539	50	0,000840	0,000836	0,999164	98 742	83	4 758 831	47,69
28	59 568	48	0,000806	0,000815	0,999185	98 660	80	4 660 088	46,73
29	59 898	48	0,000801	0,000848	0,999152	98 579	84	4 561 429	45,77
30	60 685	61	0,001005	0,000872	0,999128	98 496	86	4 462 849	44,81
31	61 249	55	0,000898	0,000883	0,999117	98 410	87	4 364 354	43,85
32	60 522	56	0,000925	0,000897	0,999103	98 323	88	4 265 944	42,89
33	59 733	53	0,000887	0,000882	0,999118	98 235	87	4 167 621	41,93
34	58 834	53	0,000901	0,000992	0,999008	98 148	97	4 069 387	40,96

Tablice mortaliteta Republike Hrvatske 2010. – 2012.

Starost	*Skupine živih*	*Skupine umrlih*	*Sirove vjerojatnosti smrti*	*Izglađene vjerojatnosti smrti*	*Vjerojatnosti doživljenja*	*Broj živih*	*Broj mrtvih*	*Zbroj brojeva živih*	*Očekivano trajanje života*
x	V_x	M_x	q_x'	q_x	p_x	l_x	d_x	N_x	e_x
					Muškarci				
35	58 039	77	0.001327	0,001168	0,998832	98 051	115	3 971 239	40,00
36	57 723	81	0.001403	0,001279	0,998721	97 936	125	3 873 188	39,05
37	57 403	97	0.001690	0,001395	0,998605	97 811	136	3 775 252	38,10
38	57 333	85	0.001483	0,001527	0,998473	97 674	149	3 677 441	37,15
39	57 338	87	0.001517	0,001531	0,998469	97 525	149	3 579 767	36,21
40	55 748	94	0.001686	0,001719	0,998281	97 376	167	3 482 242	35,26
41	55 306	115	0.002079	0,002035	0,997965	97 208	198	3 384 866	34,32
42	56 878	136	0.002391	0,002275	0,997725	97 011	221	3 287 657	33,39
43	58 414	154	0.002636	0,002542	0,997458	96 790	246	3 190 647	32,46
44	60 434	185	0.003061	0,002854	0,997146	96 544	276	3 093 857	31,55
45	61 903	193	0.003118	0,003130	0,996870	96 268	301	2 997 313	30,64
46	60 994	202	0.003312	0,003432	0,996568	95 967	329	2 901 045	29,73
47	59 972	245	0.004085	0,004015	0,995985	95 638	384	2 805 078	28,83
48	60 940	286	0.004693	0,004603	0,995397	95 254	438	2 709 440	27,94
49	62 176	332	0.005340	0,005224	0,994776	94 815	495	2 614 187	27,07
50	62 947	351	0.005576	0,005920	0,994080	94 320	558	2 519 372	26,21
51	63 531	454	0.007146	0,006651	0,993349	93 761	624	2 425 052	25,36
52	63 449	469	0.007392	0,007437	0,992563	93 138	693	2 331 290	24,53
53	62 692	505	0.008055	0,008221	0,991779	92 445	760	2 238 152	23,71
54	63 552	596	0.009378	0,009183	0,990817	91 685	842	2 145 707	22,90
55	64 660	670	0,010362	0,010108	0,989892	90 843	918	2 054 022	22,11
56	64 986	725	0,011156	0,011017	0,988983	89 925	991	1 963 179	21,33
57	63 450	734	0,011568	0,011862	0,988138	88 934	1 055	1 873 254	20,56
58	60 866	810	0,013308	0,013337	0,986663	87 879	1 172	1 784319	19,80
59	57 763	883	0,015287	0,014508	0,985492	86 707	1 258	1 696 440	19,07
60	55 903	911	0,016296	0,015732	0,984268	85 449	1 344	1 609 732	18,34
61	55 310	932	0,016850	0,017019	0,982981	84 105	1 431	1 524283	17,62
62	51 548	949	0,018410	0,018242	0,981758	82 674	1 508	1 440178	16,92
63	48 306	946	0,019583	0,019685	0,980315	81 166	1 598	1 357 504	16,23
64	45 232	967	0,021379	0,021346	0,978654	79 568	1 698	1 276 338	15,54
65	37 518	879	0,023429	0,022996	0,977004	77 869	1 791	1 196 770	14,87
66	33 294	840	0,025230	0,024789	0,975211	76 079	1 886	1 118901	14,21
67	35 732	967	0,027063	0,026757	0,973243	74 193	1 985	1 042 822	13,56
68	38 739	1 127	0,029092	0,028945	0,971055	72 208	2 090	968 629	12,91
69	38 753	1 245	0,032127	0,031415	0,968585	70 118	2 203	896 421	12,28

Tablice mortaliteta Republike Hrvatske 2010. – 2012.

Starost *x*	*Skupine živih* V_x	*Skupine umrlih* M_x	*Sirove vjerojatnosti smrti* q_x'	*Izglađene vjerojatnosti smrti* q_x	*Vjerojatnosti doživljenja* p_x	*Broj živih* l_x	*Broj mrtvih* d_x	*Zbroj brojeva živih* N_x	*Očekivano trajanje života* e_x
					Muškarci				
70	37 814	1 243	0,032871	0,034214	0,965786	67 915	2 324	826 304	11,67
71	37 829	1 477	0,039044	0,037399	0,962601	65 591	2 453	758 389	11,06
72	36 216	1 468	0,040535	0,040966	0,959034	63 138	2 587	692 797	10,47
73	35 170	1 568	0,044583	0,044704	0,955296	60 552	2 707	629 659	9,90
74	34 108	1 685	0,049402	0,049723	0,950277	57 845	2 876	569 107	9,34
75	32 072	1 825	0,056903	0,055094	0,944906	54 969	3 028	511 262	8,80
76	30 049	1 784	0,059370	0,060888	0,939112	51 940	3 163	456 294	8,28
77	27 822	1 902	0,068363	0,068093	0,931907	48 778	3 321	404 354	7,79
78	25 326	1 956	0,077233	0,075622	0,924378	45 456	3 437	355 576	7,32
79	22 911	1 932	0,084326	0,083508	0,916492	42 019	3 509	310120	6,88
80	20 850	1 978	0,094868	0,092007	0,907993	38 510	3 543	268 101	6,46
81	18 154	1 788	0,098491	0,100487	0,899513	34 967	3 514	229 591	6,07
82	15 329	1 693	0,110444	0,110518	0,889482	31 453	3 476	194624	5,69
83	12 603	1 554	0,123304	0,120707	0,879293	27 977	3 377	163171	5,33
84	10 227	1 338	0,130830	0,131390	0,868610	24 600	3 232	135194	5,00
85	8 179	1 157	0,141460	0,143680	0,856320	21 368	3 070	110594	4,68
86	6 508	1 051	0,161494	0,158332	0,841668	18 298	2 897	89 227	4,38
87	5 249	909	0,173176	0,171651	0,828349	15 400	2 644	70 929	4,11
88	4 203	782	0,186058	0,185581	0,814419	12 757	2 367	55 529	3,85
89	3 309	675	0,203989	0,200152	0,799848	10 390	2 079	42 772	3,62
90	2 499	523	0,209284	0,213885	0,786115	8 310	1 777	32 382	3,40
91	1 837	428	0,232989	0,229082	0,770918	6 533	1 497	24 072	3,18
92	987	251	0,254306	0,245358	0,754642	5 036	1 236	17 539	2,98
93	470	124	0,263830	0,262791	0,737209	3 800	999	12 503	2,79
94	325	92	0,283077	0,281462	0,718538	2 802	789	8 703	2,61
95	277	68	0,245487	0,301460	0,698540	2 013	607	5 901	2,43
96	279	99	0,354839	0,322879	0,677121	1 406	454	3 888	2,26
97	237	78	0,329114	0,345819	0,654181	952	329	2 482	2,11
98	177	60	0,338983	0,370390	0,629610	623	231	1 529	1,96
99	88	40	0,454545	0,396706	0,603294	392	156	906	1,81
100	49	18	0,367347	0,424892	0,575108	237	101	514	1,67
101	24	7	0,291667	0,455080	0,544920	136	62	278	1,54
102	14	6	0,428571	0,487414	0,512586	74	36	142	1,41
103	7	5	0,714286	0,522044	0,477956	38	20	67	1,27
104	4	3	0,750000	0,559136	0,440864	18	10	29	1,12
105	2	1	0,500000	0,598862	0,401138	8	5	11	0,90

Tablice mortaliteta Republike Hrvatske 2010. – 2012.

Starost *x*	*Skupine živih* V_x	*Skupine umrlih* M_x	*Sirove vjerojatnosti smrti* q_x'	*Izglađene vjerojatnosti smrti* q_x	*Vjerojatnosti doživljenja* p_x	*Broj živih* l_x	*Broj mrtvih* d_x	*Zbroj brojeva živih* N_x	*Očekivano trajanje života* e_x
					Žene				
0	40 958	93	0,002271	0,002271	0,997729	100 000	227	8 086 313	80,36
1	42 487	12	0,000282	0,000282	0,999718	99 773	28	7 986 313	79,54
2	42 611	9	0,000211	0,000211	0,999789	99 745	21	7 886 540	78,57
3	41 144	8	0,000194	0,000194	0,999806	99 724	19	7 786 795	77,58
4	40 059	6	0,000150	0,000153	0,999847	99 704	15	7 687 072	76,60
5	40 585	5	0,000123	0,000137	0,999863	99 689	14	7 587 367	75,61
6	40 190	7	0,000174	0,000124	0,999876	99 675	12	7 487 678	74,62
7	38 950	3	0,000077	0,000090	0,999910	99 663	9	7 388 003	73,63
8	39 172	3	0,000077	0,000076	0,999924	99 654	8	7 288 340	72,64
9	39 875	3	0,000075	0,000060	0,999940	99 646	6	7 188 686	71,64
10	41 379	3	0,000073	0,000055	0,999945	99 640	5	7 089 040	70,65
11	43 316	2	0,000046	0,000043	0,999957	99 635	4	6 989 399	69,65
12	45 371	1	0,000022	0,000041	0,999959	99 631	4	6 889 764	68,65
13	47 770	4	0,000084	0,000079	0,999921	99 627	8	6 790 133	67,66
14	49 131	7	0,000142	0,000116	0,999884	99 619	12	6 690 507	66,66
15	48 493	7	0,000144	0,000142	0,999858	99 607	14	6 590 888	65,67
16	47 679	7	0,000147	0,000163	0,999837	99 593	16	6 491 281	64,68
17	47 564	16	0,000336	0,000183	0,999817	99 577	18	6 391 688	63,69
18	48 746	7	0,000150	0,000200	0,999800	99 559	20	6 292 111	62,70
19	47 908	11	0,000230	0,000196	0,999804	99 539	19	6 192 552	61,71
20	49 826	9	0,000181	0,000205	0,999795	99 519	20	6 093 013	60,72
21	49 927	12	0,000240	0,000218	0,999782	99 499	22	5 993 494	59,74
22	50 945	12	0,000236	0,000234	0,999766	99 477	23	5 893 995	58,75
23	52 025	12	0,000231	0,000247	0,999753	99 454	25	5 794 518	57,76
24	52 745	15	0,000284	0,000254	0,999746	99 429	25	5 695 064	56,78
25	54 464	16	0,000294	0,000260	0,999740	99 404	26	5 595 635	55,79
26	58 418	17	0,000301	0,000267	0,999733	99 378	27	5 496 231	54,81
27	57 087	12	0,000210	0,000267	0,999733	99 352	27	5 396 853	53,82
28	57 083	19	0,000333	0,000272	0,999728	99 325	27	5 297 501	52,83
29	57 527	16	0,000278	0,000277	0,999723	99 298	28	5 198 176	51,85
30	58 150	14	0,000241	0,000280	0,999720	99 271	28	5 098 878	50,86
31	58 520	22	0,000376	0,000331	0,999669	99 243	33	4 999 608	49,88
32	58 122	20	0,000344	0,000371	0,999629	99 210	37	4 900 365	48,89
33	57 398	33	0,000575	0,000404	0,999596	99 173	40	4 801 155	47,91
34	57 195	21	0,000367	0,000440	0,999560	99 133	44	4 701 982	46,93

Tablice mortaliteta Republike Hrvatske 2010. – 2012.

Starost *x*	*Skupine živih* V_x	*Skupine umrlih* M_x	*Sirove vjerojatnosti smrti* q_x'	*Izglađene vjerojatnosti smrti* q_x	*Vjerojatnost i doživljenja* p_x	*Broj živih* l_x	*Broj mrtvih* d_x	*Zbroj brojeva živih* N_x	*Očekivano trajanje života* e_x
					Žene				
35	56 786	27	0.000475	0,000477	0,99952S	99 089	47	4 602 849	45,95
36	56 095	25	0.000446	0,000514	0,999486	99 042	51	4 503 759	44,97
37	56 223	40	0.000711	0,000590	0,999410	98 991	58	4 404 717	44,00
38	56 368	34	0.00060S	0,000659	0,999341	98 933	65	4 305 726	43,02
39	56 147	44	0.000784	0,000724	0,999276	98 868	72	4 206 793	42,05
40	54 828	40	0.000730	0,000823	0,999177	98 796	81	4 107 925	41,08
41	54 902	66	0.001202	0,000917	0,999083	98 715	91	4 009 129	40,11
42	56 972	52	0.000913	0,000998	0,999002	98 624	98	3 910 415	39,15
43	58 510	59	0.001008	0.001130	0,998870	98 526	111	3 811 790	38,19
44	60 807	74	0.001217	0,001263	0,998737	98 414	124	3 713 265	37,23
45	62 525	105	0.001679	0,001526	0,998474	98 290	150	3 614 850	36,28
46	61 515	117	0.001902	0,001718	0,998282	98 140	169	3 516 560	35,33
47	60 664	124	0.002044	0,001924	0,998076	97 972	189	3 418 420	34,39
48	61 976	124	0.002001	0,002050	0,997950	97 78S	200	3 320 448	33,46
49	63 730	142	0.002228	0,002200	0,997800	97 583	215	3 222 665	32,52
50	64 727	158	0.002441	0,002572	0,997428	97 368	250	3 125 083	31,60
51	65 052	208	0.003197	0,002889	0,997111	97 117	281	3 027 715	30,68
52	64 816	215	0.003317	0.003166	0,996834	96 837	307	2 930 597	29,76
53	64 470	228	0.003537	0,003461	0,996539	96 530	334	2 833 760	28,86
54	65 735	236	0.003590	0,003755	0,996245	96 196	361	2 737 230	27,95
55	66 767	290	0.004343	0,003994	0,996006	95 835	383	2 641 034	27,06
56	65 487	273	0.004169	0,004224	0,995776	95 452	403	2 545 199	26,16
57	64 082	281	0.004385	0,004585	0,995415	95 049	436	2 449 746	25,27
58	63 238	342	0.005408	0,005180	0,994820	94 613	490	2 354 697	24,39
59	60 264	395	0.006554	0,005580	0,994420	94 123	525	2 260 084	23,51
60	59 239	358	0.006043	0,006014	0,993986	93 598	563	2 165 961	22,64
61	60 774	430	0.007075	0,006501	0,993499	93 035	605	2 072 363	21,78
62	58 542	392	0.006696	0,006855	0,993145	92 430	634	1 979 327	20,91
63	55 921	398	0.007117	0,007201	0,992799	91 797	661	1 886 897	20,06
64	53 142	435	0.008186	0,008016	0,991984	91 136	731	1 795 100	19,20
65	44 939	403	0.008968	0,009331	0,990669	90 405	844	1 703 965	18,35
66	40878	463	0.011326	0,010346	0,989654	89 562	927	1 613 560	17,52
67	44 965	546	0,012143	0,011516	0,988484	88 635	1 021	1 523 998	16,69
68	49 202	652	0.013251	0,012874	0,987126	87 614	1 128	1 435 363	15,88
69	49 479	742	0,014996	0,014455	0,9B5545	86 486	1 250	1 347 749	15,08

Tablice mortaliteta Republike Hrvatske 2010. – 2012.

Starost *x*	*Skupine živih* V_x	*Skupine umrlih* M_x	*Sirove vjerojatnosti smrti* q_x'	*Izglađene vjerojatnosti smrti* q_x	*Vjerojatnost i doživljenja* p_x	*Broj živih* l_x	*Broj mrtvih* d_x	*Zbroj brojeva živih* N_x	*Očekivano trajanje života* e_x
					Žene				
70	49 257	795	0,016140	0,016287	0,983713	85 236	1 388	1 261 263	14,30
71	50 229	927	0,018455	0,018132	0,981868	83 848	1 520	1 176 026	13,53
72	49 829	1 006	0,020189	0,020694	0,979306	82 328	1 704	1 092 179	12,77
73	49 917	1 214	0,024320	0,023928	0,976072	80 624	1 929	1 009 851	12,03
74	49 443	1 423	0,028781	0,027431	0,972569	78 695	2 159	929 227	11,31
75	48 066	1 480	0,030791	0,031527	0,968473	78 536	2 413	850 532	10,61
76	46 573	1 706	0,036631	0,035937	0,964063	74 123	2 664	773 996	9,94
77	44 979	1 830	0,040686	0,041521	0,958479	71 459	2 967	699 873	9,29
78	43 305	2 118	0,048909	0,047881	0,952119	68 492	3 279	628 414	8,67
79	40 773	2 245	0,055061	0,054979	0,945021	65 213	3 585	559 922	8,09
80	37 956	2 406	0,063389	0,02616	0,937384	61 627	3 859	494 709	7,53
81	33 990	2 388	0,070256	0,071325	0,928675	57 769	4 120	433 082	7,00
82	29 875	2 460	0,082343	0,082669	0,917331	53 648	4 435	375 313	6,50
83	26 000	2 540	0,097692	0,093766	0,906234	49 213	4 615	321 665	6,04
84	23 150	2 416	0,104363	0,105809	0,894191	44 599	4 719	272 452	5,61
85	20 892	2 474	0,118419	0,117991	0,882009	39 880	4 705	227 853	5,21
86	17 814	2 364	0,132705	0,131238	0,868762	35 174	4 616	187 973	4,84
87	15 133	2 166	0,143131	0,147403	0,852597	30 558	4 504	152 799	4,50
88	12 618	2 148	0,170233	0,163530	0,836470	26 054	4 261	122 241	4,19
89	10 250	1 844	0,179902	0,180211	0,819789	21 793	3 927	96 187	3,91
90	8 019	1 566	0,195286	0,195286	0,804714	17 866	3 489	74 394	3,66
91	5 653	1 214	0,214753	0,209825	0,790175	14 377	3 017	56 528	3,43
92	3 027	725	0,239511	0,225447	0,774553	11 360	2 561	42 152	3,21
93	1 537	388	0,252440	0,242231	0,757769	8 799	2 131	30 791	3,00
94	1 093	289	0,264410	0,260265	0,739735	6 668	1 735	21 992	2,80
95	899	269	0,299221	0,279642	0,720358	4 932	1 379	15 325	2,61
96	1 013	322	0,317868	0,300462	0,699538	3 553	1 068	10 392	2,42
97	859	295	0,343423	0,322831	0,677169	2 485	802	6 839	2,25
98	534	211	0,395131	0,346866	0,653134	1 683	584	4 354	2,09
99	333	109	0,327327	0,372690	0,627310	1 099	410	2 671	1,93
100	212	84	0,396226	0,400437	0,599563	690	276	1 571	1,78
101	111	55	0,495495	0,430249	0,569751	413	178	882	1,63
102	46	18	0,391304	0,462281	0,537719	236	109	468	1,49
103	29	15	0,517241	0,496698	0,503302	127	63	233	1,34
104	13	9	0,692308	0,533677	0,466323	64	34	106	1,17
105	7	4	0,571429	0,573410	0,426590	30	17	42	0,93

PRILOG 2

Tablice 17 engleskih društava

x	l_x	d_x	D_x	N_x	M_x	a_x	x
10	100 000	676	70 891,88	1 577 587,08	17 543,53	22,253 4	**10**
11	99 324	674	68 031,55	1 506 695,20	17 080,50	22,147 0	**11**
12	98 650	672	65 284,92	1 438 663,65	16 634,46	22,036 7	**12**
13	97 978	671	62 647,54	1 373 378,73	16 204,78	21,922 3	**13**
14	97307	671	60 114,49	1 310 731,19	15 790,25	21,803 9	**14**
15	96 636	671	57 681,12	1 250 616,70	15 389,74	21,681 6	**15**
16	95 965	672	55 343,58	1 192 935,58	15 002,77	21,555 1	**16**
17	95 293	673	53 097,62	1 137 592,00	14 628,32	21,424 5	**17**
18	94 620	675	50 939,73	1 084 494,38	14 266,01	21,289 8	**18**
19	93 954	677	48 866,03	1 033 554,65	13 914,90	21,150 8	**19**
20	93 268	680	46 873,31	984 688,62	13 574,67	21,007 4	**20**
21	92 588	633	44 958,04	937 815,31	13 244,48	20,859 8	**21**
22	91 905	686	43 117,29	892 857,27	12 924,05	20,707 6	**22**
23	91 219	690	41 348,26	849 739,98	12 613,09	20,550 8	**23**
24	90 529	694	39 647,82	808 391,72	12 310,90	20,389 3	**24**
25	89 835	698	38 013,41	786 743,90	12 017,24	20,223 0	**25**
26	89 137	703	36 442,56	730 730,49	11 731,87	20,051 6	**26**
27	88 434	708	34 932,51	694 287,93	11 454,18	19,875 1	**27**
28	87 726	714	33 481,01	659 355,42	11 183,97	19,693 4	**28**
29	87 012	720	32 085,51	625 874,41	10 920,68	19,506 5	**29**
30	86 292	727	30 743,93	593 788,90	10 664,16	19,314 0	**30**
31	85 565	734	29 454,07	561 044,92	10 413,90	19,116 0	**31**
32	84 831	742	28 213,92	533 590,85	10 169,78	18,912 3	**32**
33	84 089	750	27 021,39	505 376,93	9 931,346	18,702 8	**33**
34	83 339	758	25 874,76	478 355,54	9 698,489	18,487 3	**34**
35	82 581	767	24 772,39	452 480,78	9 471,107	18,266 5	**35**
36	81 814	776	23 712,37	427 708,39	9 248,805	18,037 4	**36**
37	81 038	785	22 693,20	403 996,02	9 031,500	17,502 5	**37**
38	80 253	795	21 713,41	381 302,82	8 819,109	17,560 7	**38**
39	79 453	805	20 771,31	359 589,41	8 611,286	17,311 8	**39**
40	78 653	815	19 865,58	338 818,10	8 407,966	17,055 5	**40**
41	77 833	826	18 994,91	318 952,52	8 209,080	16,791 5	**41**
42	77 012	839	18 157,82	299 957,62	8 014,327	16,519 5	**42**
43	76 173	857	17 352,66	281 799,79	7 823,197	16,239 6	**43**
44	75 316	881	16 577,23	264 447,13	7 634,570	15,952 4	**44**
45	74 435	909	15 829,29	247 769,90	7 447,217	15,658 9	**45**
46	73 526	944	15 107,23	232 040,61	7 260,447	15,359 6	**46**
47	72 582	981	14 408,96	216 933,38	7 073,044	15,055 4	**47**
48	71 601	1 021	11 733,53	202 524,42	6 884,882	14,746 7	**48**
49	70 580	1 063	13 079,90	188 790,89	6 695,670	14,433 7	**49**
50	69 517	1 108	12 447,25	175 710,99	6 505,336	14,116 4	**50**
51	63 409	1 156	11 834,65	163 263,74	6 313,654	13,795 4	**51**

52	67 253	1 207	11 241,22	151 429,09	6 120,430	13,470 9	**52**
53	66 046	1 261	10 666,16	140 187,87	5 925,505	13,143 2	**53**
54	64 785	1 316	10 108,71	129 521,71	5 728,745	12,812 9	**54**
55	63 469	1 375	9 568,468	119 412,995	5 530,348	12,479 8	**55**
56	62 094	1 436	9 044,615	109 844,527	5 330,065	12,144 7	**56**
57	60 658	1 497	8 536,663	100 799,912	5 127,970	11,807 8	**57**
58	59 161	1 561	8 044,429	92 263,249	4 924,416	11,469 2	**58**
59	57 600	1 627	7 567,316	84 218,820	4 719,336	11,129 3	**59**
60	55 973	1 698	7 104,894	76 651,504	4 512,814	10,788 5	**60**
61	54 275	1 770	6 656,386	69 546,610	4 304,568	10,448 1	**61**
62	52 505	1 844	6 221,555	62 890,224	4 094,833	10,108 4	**62**
63	50 661	1 917	5 800,050	56 668,669	3 883,718	9,770 4	**63**
64	48 744	1 990	5 391,862	50 868,619	3 671,667	9,434 3	**64**
65	46 754	2 061	4 996,847	45 476,757	3 458,985	9,101 1	**65**
66	44 693	2 128	4 615,050	40 479,910	3 246,164	8,771 3	**66**
67	42 565	2 191	4 246,677	35 864,860	3 033,855	8,445 4	**67**
68	40 374	2 246	3 891,867	31 618,183	2 822,653	8,124 2	**68**
69	38 128	2 291	3 551,075	27 726,316	2 613,470	7,807 9	**69**
70	35 837	2 327	3 224,833	24 175,241	2 407,312	7,496 6	**70**
71	33 510	2 351	2 913,464	20 950,408	2 204,996	7,190 9	**71**
72	31 159	2 362	2 617,449	18 036,944	2 007,505	6,891 0	**72**
73	28 797	2 358	2 337,231	15 419,495	1 815,799	6,597 3	**73**
74	26 439	2 339	2 073,286	13 082,264	1 630,890	6,309 9	**74**
75	24 100	2 303	1 825,958	11 008,978	1 453,674	6,029 2	**75**
76	21 797	2 249	1 595,622	9 183,020	1 285,086	5,755 1	**76**
77	19 548	2 179	1 382,596	7 587,398	1 126,018	5,487 8	**77**
78	17 369	2 092	1 186,937	6 204,802	977,112 4	2,227 6	**78**
79	15 277	1 987	1 008,673	5 017,865	838,986 8	4,974 7	**79**
80	13 290	1 866	847,807	4 009,192 3	712,230 4	4,728 9	**80**
81	11 424	1 730	704,125 2	3 161,385 3	597,218 4	4,489 8	**81**
82	9 694	1 582	577,290 4	2 457,260 1	494,194 6	4,256 5	**82**
83	8 112	1 427	466,744 2	1 879,969 7	403,170 3	4,027 8	**83**
84	6 685	1 268	371,631 0	1 413,225 5	323,840 8	3,802 8	**84**
85	5 417	1 111	290,957 2	1 041,594 5	255,734 2	3,579 9	**85**
86	4 306	958	223,462 2	750,637 3	198,078 2	3,359 1	**86**
87	3 348	811	167,870 7	527,175 1	150,043 6	3,140 4	**87**
88	2 537	673	122,905 0	359,304 4	110,754 6	2,923 4	**88**
89	1 864	545	87,247 86	236,399 39	79,253 66	2,709 5	**89**
90	1 319	427	59,650 39	149,151 53	54,606 61	2,500 4	**90**
91	892	322	38,975 62	89,501 14	35,949 00	2,296 3	**91**
92	570	231	24,063 71	50,525 52	22,355 12	2,099 7	**92**
93	339	155	13,827 61	26,461 81	12,932 77	1,913 7	**93**
94	184	95	7,251 451	12,634 204	6,824 206	1,742 3	**94**
95	89	52	3,388 884	5,382 753	3,206 858	1,588 4	**95**
96	37	24	1,361 219	1,993 869	1,293 794	1,464 8	**96**
97	13	9	0,462 093 1	0,632 649 7	0,440 699 0	1,369 1	**97**
98	4	3	0,137 374 4	0,170 556 6	0,131 606 7	1,241 5	**98**
99	1	1	0,033 182 21	0,033 182 21	0,032 060 11	1,000 0	**99**

PRILOG 2.1.

Tablice 43 britanska društava za muškarce

x	l_x	d_x	D_x	N_x	a_x	x
25	97 691	687	41 338	847 224	20,495	**25**
26	97 004	692	39 659	805 886	20,321	**26**
27	96 312	697	38 044	766 227	20,140	**27**
28	95 615	704	36 491	728 183	19,955	**28**
29	94 911	710	34 999	691 692	19,763	**29**
30	94 201	718	33 562	656 693	19,567	**30**
31	93 483	727	32 180	623 131	19,364	**31**
32	92 756	736	30 850	590 951	19,156	**32**
33	92 020	747	29 570	560 101	18,942	**33**
34	91 273	759	28 338	530 531	18,721	**34**
35	90 514	771	27 153	502 193	18,495	**35**
36	89 743	786	26 011	475 040	18,264	**36**
37	88 957	802	24 911	449 029	18,026	**37**
38	88 155	819	23 852	424 118	17,781	**38**
39	87 336	839	22 831	400 266	17,532	**39**
40	86 497	858	21 847	377 435	17,276	**40**
41	85 639	882	20 899	355 588	17,015	**41**
42	84 757	905	19 984	334 689	16,748	**42**
43	83 852	932	19 102	314 705	16,475	**43**
44	82 920	961	18 251	295 603	16,197	**44**
45	81 959	991	17 429	277 352	15,913	**45**
46	80 968	1 024	16 636	259 923	15,624	**46**
47	79 944	1 061	15 870	243 287	15,330	**47**
48	78 883	1 098	15 130	227 417	15,031	**48**
49	77 785	1 140	14 415	212 287	14,727	**49**
50	76 645	1 183	13 724	197 872	14,418	**50**
51	75 462	1 230	13 055	184 148	14,105	**51**
52	74 232	1 280	12 408	171 093	13,790	**52**
53	72 952	1 333	11 781	158 685	13,469	**53**
54	71 619	1 388	11 175	146 904	13,146	**54**
55	70 231	1 446	10 588	135 729	12,819	**55**
56	68 785	1 509	10 019	125 141	12,490	**56**
57	67 276	1 572	9 468,0	115 122	12,159	**57**
58	65 704	1 639	8 934,1	105 654,4	11,826	**58**
59	64 065	1 709	8 416,7	96 720,3	11,492	**59**
60	62 356	1 779	7 915,2	88 303,6	11,156	**60**
61	60 577	1 853	7 429,3	80 388,4	10,820	**61**
62	58 724	1 925	6 958,6	72 959,1	10,485	**62**
63	56 799	2 000	6 502,8	66 000,5	10,150	**63**
64	54 799	2 074	6 061,6	59 497,7	9,815	**64**
65	52 725	2 146	5 635,1	53 436,1	9,483	**65**
66	50 579	2 217	5 222,9	47 801,0	9,152	**66**

67	48 362	2 283	4 825,1	42 578,1	8,824	**67**
68	46 079	2 345	4 441,8	37 753,0	8,500	**68**
69	43 734	2 401	4 073,2	33 311,2	8,178	**69**
70	41 333	2 449	3 719,5	29 238,0	7,861	**70**
71	38 884	2 488	3 380,7	25 518,5	7,548	**71**
72	36 396	2 515	3 057,4	22 137,8	7,241	**72**
73	33 881	2 530	2 749,8	19 080,4	6,931	**73**
74	31 351	2 531	2 458,4	16 330,6	6,643	**74**
75	28 820	2 515	2 183,5	13 872,2	6,353	**75**
76	26 305	2 482	1 925,6	11 688,7	6,070	**76**
77	23 823	2 431	1 684,9	9 763,1	5,794	**77**
78	21 392	2 361	1 461,8	8 078,2	5,526	**78**
79	19 031	2 271	1 253,5	6 616,4	5,266	**79**
80	16 760	2 162	1 069,2	5 359,9	5,013	**80**
81	14 598	2 037	899,73	4 290,7	4,769	**81**
82	12 561	1 893	748,05	3 390,92	4,533	**82**
83	10 668	1 738	613,78	2 642,87	4,306	**83**
84	8 930	1 571	496,42	2 029,09	4,088	**84**
85	7 359	1 398	395,24	1 532,67	3,878	**85**
86	5 961	1 222	309,34	1 137,43	3,677	**86**
87	4 739	1 048	237,61	828,09	3,485	**87**
88	3 691	879	178,83	590,48	3,302	**88**
89	2 812	721	131,62	411,65	3,128	**89**
90	2 091	578	94,541	280,03	2,962	**90**
91	1 513	449	66,130	185,491	2,805	**91**
92	1 064	339	44,935	119,361	2,656	**92**
93	725	248	29,582	74,426	2,516	**93**
94	477	174	18,814	44,844	2,384	**94**
95	303	119	11,523	26,03	2,259	**95**
96	184	77	6,772 8	14,507	2,142	**96**
97	107	48	3,806 2	7,7340	2,032	**97**
98	59	28	2,036 7	3,927 8	1,929	**98**
99	31	16	1,033 0	1,891 1	1,831	**99**
100	15	8	0,494 3	0,494 3	1,736	**100**
101	7	4	0,221 9	0,363 8	1,639	**101**
102	3	2	0,092 9	1,141 9	1,527	**102**
103	1	1	0,036 1	0,049 0	1,357	**103**
104	0	0	0,012 9	0,012 9	1,000	**104**

PRILOG 2.2.

Tablice 43 britanska društava za žene

x	l_x	d_x	D_x	N_x	a_x	x
25	97 658	665	41 324	858 262	20,769	**25**
26	96 993	670	39 654	816 938	20,602	**26**
27	96 323	677	38 049	777 284	20,429	**27**
28	95 646	685	36 504	739 235	20,251	**28**
29	94 961	695	35 017	702 731	20,068	**29**
30	94 266	706	33 585	667 714	19,881	**30**
31	93 560	720	32 206	634 129	19,690	**31**
32	92 840	735	30 878	601 923	19,494	**32**
33	92 105	751	29 597	571 045	19,294	**33**
34	91 354	769	28 364	541 448	19,090	**34**
35	90 585	788	27 174	513 084	18,882	**35**
36	89 797	808	26 026	485 910	18,670	**36**
37	88 989	831	24 920	459 884	18,454	**37**
38	88 158	855	23 852	434 964	18,236	**38**
39	87 303	879	22 822	411 112	18,014	**39**
40	86 424	904	21 828	388 290	17,788	**40**
41	85 520	931	20 870	366 462	17,559	**41**
42	84 589	958	19 944	345 592	17,328	**42**
43	83 631	985	19 052	325 648	17,093	**43**
44	82 646	1 013	18 190	306 596	16,855	**44**
45	81 633	1 040	17 360	288 406	16,613	**45**
46	80 593	1 067	16 559	271 046	16,368	**46**
47	79 526	1 093	15 787	254 487	16,120	**47**
48	78 433	1 119	15 044	238 700	15,867	**48**
49	77 314	1 144	14 328	223 656	15,610	**49**
50	76 170	1 168	13 638	209 328	15,349	**50**
51	75 002	1 190	12 975	195 690	15,082	**51**
52	73 812	1 211	12 338	182 715	14,810	**52**
53	72 601	1 231	11725	170 377	14,531	**53**
54	71 370	1 251	11 136	158 652	14,247	**54**
55	70 119	1 269	10 571	147 516	13,954	**55**
56	68 850	1 290	10 029	136 945	13,656	**56**
57	67 560	1 310	9 508,0	126 916	13,349	**57**
58	66 250	1 332	9 008,4	117 407,5	13,033	**58**
59	64 918	1 357	8 528,8	108 399,1	12,710	**59**
60	63 561	1 386	8 068,1	99 870,3	12,378	**60**
61	62 175	1 421	7 625,4	91 802,2	12,039	**61**
62	60 754	1 462	7 199,0	84 176,8	11,693	**62**
63	59 292	1 509	6 788,3	76 977,8	11,340	**63**
64	57 783	1 566	6 391,8	70 189,5	10,981	**64**
65	56 217	1 630	6 008,3	63 797,7	10,618	**65**

66	54 587	1 703	5 636,8	57 789,4	10,251	**66**
67	52 884	1 783	5 276,2	52 152,6	9,884	**67**
68	51 101	1 872	4 926,0	46 876,4	9,516	**68**
69	49 229	1 965	4 585,0	41 950,4	9,150	**69**
70	47 264	2 060	4 253,1	37 365,4	8,785	**70**
71	45 204	2 157	3 930,2	33 112,3	8,425	**71**
72	43 047	2 250	3 616,0	29 182,1	8,070	**72**
73	40 797	2 338	3 311,2	25 566,1	7,721	**73**
74	38 459	2 417	3 015,9	22 254,9	7,379	**74**
75	36 042	2 483	2 730,7	19 239,0	7,045	**75**
76	33 559	2 534	2 456,6	16 508,3	6,720	**76**
77	31 025	2 563	2 194,3	14 051,7	6,403	**77**
78	28 462	2 573	1 945,0	11 857,4	6,096	**78**
79	25 889	2 558	1 709,3	9 912,4	5,799	**79**
80	23 331	2 518	1 488,3	8 203,1	5,512	**80**
81	20 831	2 450	1 282,8	6 714,8	5,235	**81**
82	18 363	2 357	1 093,5	5 432,0	4,967	**82**
83	16 006	2 236	920,94	4 338,5	4,711	**83**
84	13 770	2 094	765,49	3 417,57	4,465	**84**
85	11 676	1 929	627,13	2 652,08	4,229	**85**
86	9 747	1 749	505,82	2 024,95	4,003	**86**
87	7 998	1 557	401,02	1 519,13	3,788	**87**
88	6 441	1 359	312,03	1 118,11	3,583	**88**
89	5 082	1 160	237,87	806,08	3,389	**89**
90	3 922	969	177,37	568,21	3,204	**90**
91	2 953	787	129,03	390,84	3,029	**91**
92	2 166	623	91,443	261,811	2,863	**92**
93	1 543	478	62,939	170,368	2,707	**93**
94	1 065	355	41,972	107,429	2,560	**94**
95	710	254	27,035	65,457	2,421	**95**
96	456	175	16,776	38,422	2,290	**96**
97	281	116	9,988 5	21,646 2	2,167	**97**
98	165	72	5,666 7	11,657 7	2,057	**98**
99	93	44	3,086 0	5,991 0	1,941	**99**
100	49	24	1,571 0	2,905 0	1,849	**100**
101	25	13	0,774 4	1,334 0	1,723	**101**
102	12	7	0,359 1	0,559 6	1,558	**102**
103	5	3	0,144 6	0,200 5	1,386	**103**
104	2	0	0,056 9	0,055 9	1,000	**104**

ŽIVOTOPIS

Dr.sc. Anela Čolak

Rođena 9.12.1972. godine u Širokom Brijegu, Bosna i Hercegovina.

Diplomirala na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 1996. godine, gdje je stekla stručni naziv profesor matematike i fizike.

Magistrirala na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Mostaru 2011. godine, temeljem čega je stekla zvanje magistra ekonomskih znanosti.

Doktorirala na ekonomskom fakultetu sveučilišta u Mostaru 2016. godine i stekla zvanje doktora znanosti.

Od 2000. godine je u stalnom radnom odnosu na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Mostaru, i to kao asistent na kvantitativnoj grupi predmeta. Rad u nastavi je vezan za izvođenje vježbi na kolegijima *Matematika, Poslovna matematika, Statističke metode za poslovno upravljanje*, *Poslovne financije i Projektni menadžment* na stručnom i sveučilišnom studiju.

Od 2006. godine na Fakultet Prirodno-matematičkih i odgojnih znanosti Sveučilišta u Mostaru, asistent, vanjski suradnik je na predmetima *Optimizacija i Matematik IV*.

Na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Mostaru, asistent, vanjski suradnik je na predmetu *Vjerojatnost i statistika*.

Do sada je objavila više radova u zbornicima s međunarodnom recenzijom, zbornicima na međunarodnim znanstvenim konferencijama te par radova u stručnim publikacijama i časopisima.

Radovi objavljeni u zbornicima s međunarodnom recenzijom i međunarodne znanstvene konferencije:

A) Radovi u zbornicima međunarodnih znanstvenih skupova i u znanstvenim časopisima:

- Živko, I., Gadžić, M., Čolak, A.: *Risk Management in SME from Bank Perspective*, 4th REDETE Conference, „Economic Development and Entrrpreneurship in Transition Economies: Assessment of the last 25 years, going beyond the „transition" Conference Proceedings, Graz, 2015., ISBN 978-99938-46-54-3
- Živko, I., Marijanović, Z., Čolak, A.: *Changes in Bank Market Structure Under Financial Crisis in Bosnia and Herzegovina,* Economy & Business, Journal of International Scientific Publications, Volume 9, 2015, ISSN 1314-7242.
- Čolak, A., Marijanović, Z., Grbavac, J.: *Risk Management in Life Insurance Companies in Bosnia and Herzegovina*, Economy & Business, Journal of International Scientific Publications, Volume 8, 2014, ISSN 1313-2555.
- Pranić, LJ., Pivac, S. & Čolak, A.: *Stavovi vlasnika kafića prije donošenja zakona o zabrani pušenja u tranzicijskim zemljama*, Ekonomska misao i praksa, Dubrovnik, 2013, br.1. , ISSN: 1330-1039.
- Čolak, A.: *Tržišna kretanja i rizik životnih osiguranja u Bosni i Hercegovini,* Zbornik radova Ekonomski fakultet Sveučilišta u Mostaru, Mostar, godina 2013., No. 19., ISSN: 18420-3255.
- Pranić, LJ., Pivac, S. & Čolak, A. (2013). *Pre-smoke-ban cafe job satisfaction and attitudes in transition countries.* European Journal of Turism Research 6(1), 5-19. ISSN (PRINT): 1994-7658, ISSN (ONLINE): 1314-0817

- Čolak, A., Prskalo, M.: *Finite Element Method on the Example Analysis of the Construction Pit Safety,* DAAAM International Scientific Book 2012., Vol. 11, Vienna 2012., ISBN 978-3-901509-86-5, ISSN 1726-9687
- Prskalo, M., Čolak, A.: *Application of Finite Element Method in Pile Wall Modeling,* Annals of DAAAM for 2011 & Proceedings of the 22nd International DAAAM Symposium, ISBN 978-3-901509-83-4, ISSN 1726-9679, PP 0619-0620, Editor B[ranko] Katalinić, Published by DAAAM International, Vienna, Austria, 2011.
- Čolak, A., Papac, N., Grbavac, J.: *Insurance industry in Bosnia and Herzegovina – challenges in supervision*, Internacional conference "Economic theory and practice: meeting the new challenges", Proceedings, Faculty of Economics University of Mostar, Mostar, 2011., ISSN 2233-0267.
- Papac, N., Čutura, M. i Čolak, A.: *Specificities and development of institutional frame for corporate governance in Bosnia and Herzegovina*, Interdisciplinary management research VII - IMR 2011, The Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Economic in Osijek and Hohschule Pforzheim University, Osijek-Poreč, 2011., ISSN: 1847-0408, ISBN: 978-953-253-079-7.
- Čolak, A.: *„Poissonova razdioba i redovi čekanja",* XV. Zbornik radova Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Mostaru, Mostar 2009., ISSN: 1840-3255
- Živko, I., Grbavac, J., Čolak, A.: *„Financial Markets and Bosnia and Herzegovina competivenees"*, Zbornik radova sa međunarodne konferencije 'Competitivenees in the conditions of a global economy'', Ekonomski fakultet Niš, Niš, 2008., ISBN: 978-86-85099-80-9
- Živko, I., Grbavac, J., Čolak, A.: *„Internet kao instrument informiranja klijenata bankarske industrije Bosne i Hercegovine",* Zbornik radova sa konferencije Društvo i tehnologija (Položaj i uloga elektroničkih medija – konvergencija medija), Hrvatsko komunikološko društvo Split, 2007., ISSN 1330-0067
- Živko, I., Čolak, A., Grbavac, J.:*"Competition in Banking industry of translational countries"*, International conference Contemporary Challenges of Theory and Practice in Economics, Ekonomski fakultet Beograd, Beograd, 2007., ISBN: 978-86-403-0842-7
- Živko, I., Slijepčević, S., Čolak, A.: „*Faktori opstanka banaka na globaliziranom bankarskom tržištu",* Ekonomske teme, Globalna ekonomija kao determinanta unapređenja poslovnih performansi, Niš, 2006., YU ISSN: 0353-8648

B) Radovi u stručnim časopisima i publikacijama:

- Čolak, A., Živko, I.:" *Standardi upravljanja aktivom i pasivom u društvima za osiguranje"*, Zbornik radova III. međunarodni simpozij – Globalizacija .- utjecaj na financije i računovodstvo zemalja u tranziciji, Fircon d.o.o., Mostar, 2008.

Pored objavljenih radova sudjelovala je kao suradnik na znanstveno-istraživačkom projektu Federalnog ministarstva obrazovanja i nauke Bosne i Hercegovine, pod nazivom: „*Ekonomske nejednakosti: Bosna i Hercegovina i Crna Gora – komparativna iskustva*".

Član je Hrvatskog društva za operacijska istraživanja. Aktivno se služi engleskim jezikom u govoru i pisanju.